

Autoreferat rozprawy doktorskiej pt.

**MONTE CARLO SIMULATION APPROACH
TO RELIABILITY ANALYSIS OF COMPLEX SYSTEMS**

**(PODEJŚCIE SYMULACYJNE MONTE CARLO
DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI ZŁOŻONYCH SYSTEMÓW)**

Ewa Dąbrowska

1. Wstęp

Celem pracy jest zastosowanie metody symulacyjnej Monte Carlo do badania niezawodności złożonych wielostanowych systemów technicznych, o zmiennych strukturach niezawodnościowych oraz zmiennych parametrach niezawodnościowych ich elementów w różnych stanach eksploatacyjnych, jak również wskazanie możliwości praktycznego zastosowania uzyskanych wyników w eksploatacji złożonych systemów transportowych. Wyniki uzyskane metodą symulacji Monte Carlo zastosowaną do analizy niezawodności rzeczywistego systemu transportowego pozwoliły na skonstruowanie ogólnych procedur i algorytmów pozwalających oceniać niezawodność szerszej klasy systemów złożonych niż w przypadku metody analitycznej. Procedury i algorytmy, obok cząstkowego nowego wyniku analitycznego są głównym oryginalnym wynikiem pracy.

Metody stosowane do oceny niezawodności złożonych systemów można podzielić na dwa rodzaje: metody dokładne oraz metody przybliżone. Praca poświęcona jest metodom przybliżonym: metodzie analitycznej oraz metodzie symulacji Monte Carlo.

Pewne wyniki związane z analityczną oceną niezawodności złożonych systemów o starzejących się elementach można znaleźć w pracach [Xue 1985; Xue, Yang 1995a-b; Jaźwiński, Grabski 2003; Grabski 2014; Kołowrocki, Soszyńska-Budny 2011; Kołowrocki 2014]. Wyniki związane z symulacyjną oceną niezawodności złożonych systemów o starzejących się elementach oraz uwzględniających zmienność ich struktur niezawodnościowych oraz parametrów niezawodnościowych ich elementów można znaleźć w pracach: [Kołowrocki, Kuligowska 2013; Kołowrocki, Kuligowska, Soszyńska-Budny 2014, 2015; Kuligowska 2017; Dąbrowska, Soszyńska-Budny 2018].

Podejście analityczne do badania niezawodności starzejących się systemów poddanych zmiennym procesom eksploatacji często prowadzi do skomplikowanych obliczeń. W tym przypadku można zastosować metodę symulacji Monte Carlo, która pozwala uprościć trudne do zastosowania modelowanie analityczne oraz poszerzyć klasę ocenianych systemów. Praca jest poświęcona głównie metodzie symulacyjnej i przedstawia uzyskane nowe wyniki w postaci ogólnych procedur i algorytmów symulacyjnych pozwalających oceniać niezawodność złożonych systemów o różnorodnych strukturach niezawodnościowych.

2. Niezawodność systemu złożonego

2.1. Podejście analityczne

2.1.1. Proces eksploatacji systemu

Zakładamy, że system podczas swojej eksploatacji w każdej chwili t , $t \in \langle 0, \infty \rangle$ może znajdować się w jednym z ν , $\nu \geq 2$, stanów eksploatacyjnych z_b , $b = 1, 2, \dots, \nu$. Konsekwentnie, oznaczamy przez $Z(t)$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$, proces zmian stanów eksploatacyjnych systemu, który jest funkcją ciągłej zmiennej t , przyjmującej dyskretne wartości ze zbioru $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_\nu\}$, stanów procesu operacyjnego. Przyjmujemy semi-markowski model [Grabski 2002] procesu eksploatacji systemu $Z(t)$ i oznaczamy przez Θ_{bl} jego losowe warunkowe czasy przebywania w stanie eksploatacyjnym z_b przy warunku, że następne przejście nastąpi do stanu eksploatacyjnego z_l , $b, l = 1, 2, \dots, \nu$, $b \neq l$, natomiast przez θ_{bl} realizację warunkowego czasu Θ_{bl} . Wtedy proces ten można opisać:

- wektorem

$$[p_b(0)]_{1 \times \nu} = [p_1(0), p_2(0), \dots, p_\nu(0)], \quad b = 1, 2, \dots, \nu, \quad (1)$$

prawdopodobieństw

$$p_b(0) = P(Z(0) = z_b), \quad b = 1, 2, \dots, \nu, \quad (2)$$

przebywania procesu eksploatacji systemu $Z(t)$ w poszczególnych stanach eksploatacyjnych w chwili początkowej $t = 0$;

- macierzą prawdopodobieństw przejść pomiędzy stanami

$$[p_{bl}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1\nu} \\ p_{21} & p_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{\nu 1} & p_{\nu 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p_{\nu \nu} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdzie $p_{bb} = 0$ dla $b = 1, 2, \dots, \nu$,

- macierzą warunkowych dystrybuant

$$H_{bl}(t) = P(\Theta_{bl} \leq t), \quad t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

czasów Θ_{bl} przebywania procesu $Z(t)$ w stanie eksploatacyjnym z_b przy warunku, że następne przejście nastąpi do stanu eksploatacyjnego z_l , $b, l = 1, 2, \dots, \nu$, $b \neq l$,

$$[H_{bl}(t)] = \begin{bmatrix} H_{11}(t) & H_{12}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{1\nu}(t) \\ H_{21}(t) & H_{22}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{2\nu}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{\nu 1}(t) & H_{\nu 2}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & H_{\nu \nu}(t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

gdzie $H_{bb}(t) = 0$ dla $t \in \langle 0, \infty \rangle$, $b = 1, 2, \dots, \nu$.

Przy powyższych założeniach, dysponując powyższymi parametrami, można wyznaczyć główne charakterystyki procesu eksploatacji systemu, a mianowicie:

- wartości średnie warunkowych czasów przebywania procesu w poszczególnych stanach eksploatacyjnych

$$M_{bl} = E[\Theta_{bl}] = \int_0^{\infty} t dH_{bl}(t), \quad b, l = 1, 2, \dots, \nu, \quad b \neq l;$$

- bezwarunkowe dystrybuanty czasów Θ_b przebywania procesu w poszczególnych stanach eksploatacyjnych

$$H_b(t) = \sum_{l=1}^{\nu} p_{bl} H_{bl}(t), \quad t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad b = 1, 2, \dots, \nu;$$

- wartości średnie bezwarunkowych czasów przebywania procesu w poszczególnych stanach eksploatacyjnych

$$M_b = E[\Theta_b] = \sum_{l=1}^{\nu} p_{bl} M_{bl}, \quad b = 1, 2, \dots, \nu,$$

- prawdopodobieństwa chwilowe przebywania systemu w poszczególnych stanach eksploatacyjnych

$$p_b(t) = P(Z(t) = z_b), \quad t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad b = 1, 2, \dots, \nu. \quad (5)$$

Można pokazać [Grabski 2002; Kołowrocki 2014], że graniczne wartości prawdopodobieństw chwilowych $p_b(t)$ przebywania procesu eksploatacji $Z(t)$ w poszczególnych stanach eksploatacyjnych określone są wzorem

$$p_b = \lim_{t \rightarrow \infty} p_b(t) = \frac{\pi_b M_b}{\sum_{l=1}^{\nu} \pi_l M_l}, \quad b = 1, 2, \dots, \nu, \quad (6)$$

gdzie, M_b są wartościami oczekiwanymi bezwarunkowych czasów przebywania procesu eksploatacji systemu $Z(t)$ w stanie eksploatacyjnym z_b , natomiast prawdopodobieństwa π_b spełniają układ równań

$$\begin{cases} [\pi_b] = [\pi_b] [p_{bl}] \\ \sum_{l=1}^{\nu} \pi_l = 1, \end{cases}$$

gdzie $[\pi_b] = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\nu]$, oraz macierz $[p_{bl}]$ określona jest wzorem (3).

Innymi, możliwymi do wyznaczenia charakterystykami procesu eksploatacji systemu $Z(t)$ są sumaryczne czasy $\hat{\Theta}_b$ przebywania procesu w poszczególnych stanach eksploatacyjnych z_b , $b = 1, 2, \dots, \nu$, dla ustalonego czasu eksploatacji θ systemu. Można pokazać, że sumaryczne czasy $\hat{\Theta}_b$ przebywania procesu eksploatacji w poszczególnych stanach eksploatacyjnych z_b ,

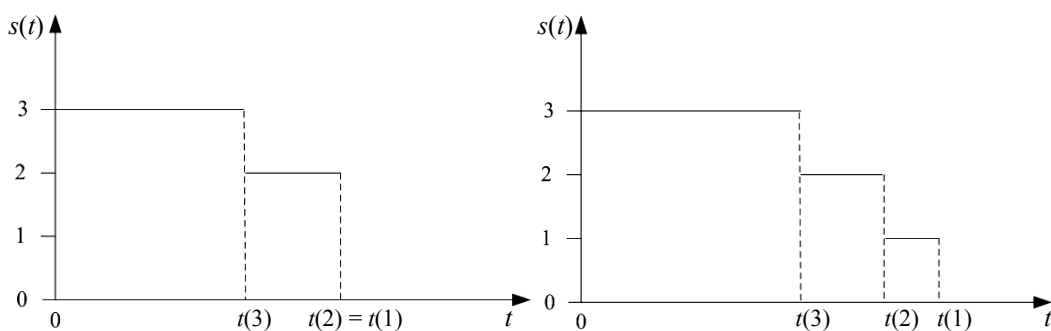
dla dostatecznie dużego czasu eksploatacji θ , mają w przybliżeniu rozkłady normalne z wartością oczekiwaną określoną wzorem $\hat{M}_b = E[\hat{\Theta}_b] = p_b\theta$, $b = 1, 2, \dots, v$, gdzie p_b określone są wzorem (6).

2.1.2. Niezawodność systemu wielostanowego

W celu wprowadzenia wielostanowego podejścia do analizy niezawodności systemów przyjęto, że:

- n jest liczbą elementów systemu,
- E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, są elementami systemu,
- wszystkie rozważane elementy oraz system mają zbiór stanów niezawodnościowych $\{0, 1, \dots, z\}$, $z \geq 1$,
- stany są uporządkowane, 0 jest stanem najgorszym natomiast stan z jest najlepszym,
- $T_i(u)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi reprezentującymi czasy przebywania elementów E_i w podzbiórze stanów niezawodnościowych $\{u, u+1, \dots, z\}$, podczas gdy elementy te w chwili $t = 0$ znajdowały się w stanie z ,
- $T(u)$ jest zmienną losową reprezentującą czas przebywania systemu w podzbiórze stanów niezawodnościowych $\{u, u+1, \dots, z\}$, $u = 0, 1, \dots, z$, podczas gdy w chwili $t = 0$ system ten znajdował w stanie z ,
- stany niezawodnościowe systemu oraz elementów pogarszają się wraz z upływem czasu t bez napraw,
- $e_i(t)$ jest stanem niezawodnościowym elementu E_i w chwili t , $t \in \langle 0, \infty \rangle$, podczas gdy element ten w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie niezawodnościowym z ,
- $s(t)$ jest stanem niezawodnościowym systemu S w chwili t , $t \in \langle 0, \infty \rangle$, podczas gdy system w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie niezawodnościowym z .

Przykładowe realizacje czterostanowego procesu zmian stanów niezawodnościowych $s(t)$ oraz realizacje $t(3)$, $t(2)$, $t(1)$ czasów zdatności $T(u)$, $u = 1, 2, 3$, systemu S są przedstawione na Rysunku 1.



Rys. 1. Realizacje procesu zmian stanów niezawodnościowych systemu

Podczas wielostanowej analizy niezawodnościowej systemów w celu zdefiniowania systemów o starzejących się w czasie elementach, wprowadzone zostało pojęcie wielostanowych funkcji niezawodności elementów i systemu.

Definicja 1

Wektor

$$R_i(t, \cdot) = [R_i(t, 0), R_i(t, 1), \dots, R_i(t, z)], \quad t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

o składowych

$$R_i(t,u) = P(e_i(t) \geq u \mid e_i(0) = z) = P(T_i(u) > t), t \in \langle 0, \infty \rangle, u = 0, 1, \dots, z, \quad (8)$$

jest prawdopodobieństwem tego, że element E_i w chwili $t, t \in \langle 0, \infty \rangle$, znajduje się w podzbiorze stanów niezawodnościowych $\{u, u+1, \dots, z\}$, podczas gdy w chwili $t = 0$ znajdował się w najlepszym stanie niezawodnościowym z , nazywamy wielostanową funkcją niezawodności elementu E_i .

Definicja 2

Wektor

$$\mathbf{R}(t, \cdot) = [\mathbf{R}(t,0), \mathbf{R}(t,1), \dots, \mathbf{R}(t,z)], t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad (9)$$

gdzie

$$\mathbf{R}(t,u) = P(s(t) \geq u \mid s(0) = z) = P(T(u) > t), t \in \langle 0, \infty \rangle, u = 0, 1, \dots, z, \quad (10)$$

jest prawdopodobieństwem tego, że system w chwili $t, t \in \langle 0, \infty \rangle$, znajduje się w podzbiorze stanów niezawodnościowych $\{u, u+1, \dots, z\}$, podczas gdy w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie niezawodnościowym z , nazywamy wielostanową funkcją niezawodności systemu.

Odwołując się do Definicji 2 oraz uwzględniając założenia dotyczące degradacji systemu, otrzymujemy następujące własności współrzędnych funkcji niezawodności systemu

$$\mathbf{R}(t,0) \geq \mathbf{R}(t,1) \geq \dots \geq \mathbf{R}(t,z), t \in \langle 0, \infty \rangle.$$

Jeśli

$$p(t,u) = P(s(t) = u \mid s(0) = z), t \in \langle 0, \infty \rangle, u = 0, 1, \dots, z,$$

jest prawdopodobieństwem tego, że system znajduje się w stanie niezawodnościowym u w chwili $t, t \in \langle 0, \infty \rangle$, podczas gdy w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z , to biorąc pod uwagę wzór (8) otrzymujemy $\mathbf{R}(t,0) = 1$, dla $t \in \langle 0, \infty \rangle$.

Powyższa własność oznacza, że $\mathbf{R}(t,0)$ może być nazwana zdegenerowaną funkcją niezawodności [Kołowrocki 1993; Kołowrocki 2004]. Stąd, występującą w (2) współrzędną $\mathbf{R}(t,0)$ można zastąpić przez 1. Analogiczne wyjaśnienie można przeprowadzić dla (7).

Podejście wielostanowe do analizy niezawodności systemów pozwala na wyróżnienie progowego stanu krytycznego systemu, którego przekroczenie jest niebezpieczne dla otoczenia lub też nie zapewnia odpowiedniego poziomu efektywności eksploatacji tego systemu. Wtedy podstawową charakterystyką niezawodności systemu staje się rozkład czasu do przekroczenia stanu progowego zwany funkcją ryzyka systemu. Definicja tej funkcji została podana poniżej.

Definicja 3

Prawdopodobieństwo

$$r(t) = P(s(t) < r \mid s(0) = z) = P(T(r) \leq t), t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

tego, że system w chwili t znajduje się w podzbiorze stanów niezawodnościowych gorszych niż stan krytyczny r , $r \in \{1, \dots, z\}$, podczas gdy w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie niezawodnościowym z , nazywamy funkcją ryzyka systemu lub krótko ryzykiem. Rozkład ten jest ściśle wyznaczony przez wielostanową funkcję niezawodności systemu, a mianowicie

$$r(t) = 1 - P(s(t) \geq r \mid s(0) = z) = 1 - \mathbf{R}(t, r), t \in \langle 0, \infty \rangle. \quad (11)$$

W dalszej części pracy zdefiniowane zostały wielostanowe systemy szeregowo, równoległe oraz szeregowo-równoległe. Dla tych systemów wyznaczone zostały funkcje niezawodności oraz wzory na czasy zdatności $T(u)$, $u = 1, 2, \dots, z$. Ponadto zilustrowano schematy ich struktur niezawodnościowych.

2.1.3. Ogólny model niezawodności wielostanowego systemu technicznego

Na podstawie przedstawionego w pracy łącznego modelu niezawodności wielostanowych systemów, który powstał w wyniku połączenia modelu niezawodnościowego rozważanych systemów oraz semi-markowskiego modelu ich zmiennych w czasie procesów eksploatacji zdefiniowane zostały warunkowe wielostanowe funkcje niezawodności elementów systemów, zależne od zmieniających się w czasie stanów eksploatacyjnych oraz wartości średnie i wariancje czasów przebywania rozważanych systemów w podzbiorach stanów niezawodnościowych. Ponadto, powyższe charakterystyki niezawodnościowe zostały oszacowane w szczególnym przypadku, gdy elementy systemu posiadają wykładnicze funkcje niezawodności.

Przyjęto, że rozkłady czasów przebywania elementów systemu wielostanowego w stanach niezawodnościowych zależą od stanów procesu eksploatacji systemu $Z(t)$, w tym sensie, że zmiany stanów procesu eksploatacji $Z(t)$ powodują zmiany ich wielostanowych funkcji niezawodności. Ponadto, założono, że proces eksploatacji systemu wielostanowego ma wpływ na jego strukturę niezawodnościową, a dokładniej, założono, że w różnych stanach eksploatacyjnych system może mieć różne struktury niezawodnościowe. Oznacza to, że funkcja niezawodności systemu zależy od jego stanów eksploatacyjnych. Przy tych założeniach, wprowadzona została warunkowa wielostanowa funkcja niezawodności elementu E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, systemu, podczas gdy system znajduje się w stanie eksploatacyjnym z_b , $b = 1, 2, \dots, \nu$, będąca wektorem

$$[R_i(t, \cdot)]^{(b)} = [1, [R_i(t, 1)]^{(b)}, \dots, [R_i(t, z)]^{(b)}], \quad (12)$$

o składowych

$$[R_i(t, u)]^{(b)} = P([T_i(u)]^{(b)} > t \mid Z(t) = z_b), t \in \langle 0, \infty \rangle, u = 1, 2, \dots, z, b = 1, 2, \dots, \nu. \quad (13)$$

Funkcja niezawodności $[R_i(t, u)]^{(b)}$ określona wzorami (12)-(13) jest warunkowym prawdopodobieństwem tego, że czas $[T_i(u)]^{(b)}$ przebywania elementu E_i systemu w podzbiorze stanów niezawodnościowych $\{u, u+1, \dots, z\}$ jest nie krótszy niż t , podczas gdy proces eksploatacji $Z(t)$ tego systemu znajduje się w stanie z_b .

Zdefiniowana została również warunkowa funkcja niezawodności systemu wielostanowego, a mianowicie

$$[\mathbf{R}(t, \cdot)]^{(b)} = [1, [\mathbf{R}(t, 1)]^{(b)}, \dots, [\mathbf{R}(t, z)]^{(b)}],$$

o składowych

$$[\mathbf{R}(t,u)]^{(b)} = P([T(u)]^{(b)} > t \mid Z(t) = z_b), t \in (0, \infty), u = 1, 2, \dots, z, b = 1, 2, \dots, \nu, \quad (14)$$

będących prawdopodobieństwem tego, że czas $T^{(b)}(u)$ przebywania systemu w podzbiorze stanów niezawodności $\{u, u+1, \dots, z\}$ jest nie krótszy niż t , podczas gdy proces eksploatacji $Z(t)$ systemu znajduje się w stanie eksploatacyjnym z_b .

Warunkowe czasy przebywania systemu w podzbiorze stanów niezawodnościowych $\{u, u+1, \dots, z\}$

$$T^{(b)}(u) = T([T_1(u)]^{(b)}, [T_2(u)]^{(b)}, \dots, [T_n(u)]^{(b)}), t \in (0, \infty), u = 1, 2, \dots, z, b = 1, 2, \dots, \nu, n \in \mathbb{N},$$

zależą od warunkowych czasów $[T_i(u)]^{(b)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, przebywania elementów systemu w tym podzbiorze stanów, podczas gdy proces eksploatacji systemu znajduje się w stanie eksploatacyjnym z_b .

Warunkowa funkcja niezawodności systemu $[\mathbf{R}(t,u)]^{(b)}$ zależy od warunkowych funkcji niezawodności $[R_i(t, \cdot)]^{(b)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $b = 1, 2, \dots, \nu$, elementów systemu zdefiniowanych przez (12)-(13) oraz od struktury niezawodnościowej systemu w stanie eksploatacyjnym z_b i przyjmuje różne postacie dla rozważanych w rozprawie systemów szeregowych, równoległych i szeregowo-równoległych.

W dalszych rozważaniach, zakładamy, że elementy E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, systemu w stanie eksploatacyjnym z_b , $b = 1, 2, \dots, \nu$, mają wykładnicze funkcje niezawodności z parametrami $[\lambda_i(u)]^{(b)}$, zwanymi intensywnościami wyjścia z podzbiorów stanów niezawodnościowych $\{u, u+1, \dots, z\}$, $u = 1, 2, \dots, z$, [Kołowrocki, Soszyńska-Budny 2011], i zmieniają się w różnych stanach eksploatacyjnych, tj. ich współrzędne są następujące

$$[R_i(t,u)]^{(b)} = P(T_i^{(b)}(u) > t \mid Z(t) = z_b) = \exp[-[\lambda_i(u)]^{(b)}t], \quad (15)$$

oraz

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}(t,u)]^{(b)} &= P(T^{(b)}(u) > t \mid Z(t) = z_b) = [\mathbf{R}([R_1(t,u)]^{(b)}, [R_2(t,u)]^{(b)}, \dots, [R_n(t,u)]^{(b)})]^{(b)} \\ &= [\mathbf{R}(\exp[-[\lambda_1(u)]^{(b)}t], \exp[-[\lambda_2(u)]^{(b)}t], \dots, \exp[-[\lambda_n(u)]^{(b)}t])]^{(b)}, \end{aligned} \quad (16)$$

dla $t \in (0, \infty)$, $u = 1, 2, \dots, z$, $b = 1, 2, \dots, \nu$, $n \in \mathbb{N}$.

Powodem tego silnego założenia jest fakt, że rozkład wykładniczy ma własność "braku pamięci", wyrażoną następująco

$$\begin{aligned} [R_i(t_0 + t, u)]^{(b)} &= P((T_i^{(b)}(u) > t_0 + t \mid T_i^{(b)}(u) > t_0) \mid Z(t) = z_b) \\ &= \frac{P(T_i^{(b)}(u) > t_0 + t \cap T_i^{(b)}(u) > t_0 \mid Z(t) = z_b)}{P(T_i^{(b)}(u) > t_0 \mid Z(t) = z_b)} \\ &= \frac{P(T_i^{(b)}(u) > t_0 + t \mid Z(t) = z_b)}{P(T_i^{(b)}(u) > t_0 \mid Z(t) = z_b)} = \frac{\exp[-[\lambda_i(u)]^{(b)}(t + t_0)]}{\exp[-[\lambda_i(u)]^{(b)}t_0]} \end{aligned}$$

$$= \exp[-[\lambda_i(u)]^{(b)}t] = P(T_i^{(b)}(u) > t | Z(t) = z_b) = [R_i(t,u)]^{(b)}.$$

Ponadto, z powyższego założenia wynika, że współrzędne bezwarunkowej funkcji niezawodności systemu są określone wzorem

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t,u) &\cong \sum_{b=1}^{\nu} p_b [\mathbf{R}(t,u)]^{(b)}, \\ &= \sum_{b=1}^{\nu} p_b [\mathbf{R}(\exp[-[\lambda_1(u)]^{(b)}t], \exp[-[\lambda_2(u)]^{(b)}t], \dots, \exp[-[\lambda_n(u)]^{(b)}t])]^{(b)} \end{aligned} \quad (17)$$

dla $t \in \langle 0, \infty \rangle$, $u = 1, 2, \dots, z$.

W przypadku, gdy czas eksploatacji systemu jest dostatecznie duży, bezwarunkowa funkcja niezawodności systemu określona jest wzorem

$$[\mathbf{R}(t, \cdot)] = [1, \mathbf{R}(t, 1), \dots, \mathbf{R}(t, z)], \quad t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad (18)$$

gdzie

$$\mathbf{R}(t, u) \cong \sum_{b=1}^{\nu} p_b [\mathbf{R}(t, u)]^{(b)}, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad u = 1, 2, \dots, z, \quad (19)$$

oraz p_b , $b = 1, 2, \dots, \nu$, są prawdopodobieństwami granicznymi przebywania systemu w poszczególnych stanach eksploatacyjnych określonymi wzorem (5).

2.2. Podejście symulacyjne Monte Carlo

W ramach poruszanego zagadnienia przedstawiona została metoda symulacji Monte Carlo. Omówione zostały następujące metody generowania liczb losowych o dowolnym rozkładzie prawdopodobieństwa: metoda przekształceń (odwracania dystrybucyjności), metoda Boxa-Mullera, metoda sumy rozkładów równomiernych, metoda biegunowa Marsaglii, metoda akceptacji i odrzucenia oraz metoda eliminacji. Zaproponowana została ogólna procedura do wyznaczania czasów zdatności rozważanych systemów wielostanowych w zmiennych warunkach eksploatacji, przy założeniu, że elementy rozważanych systemów posiadają wykładnicze funkcje czasów przebywania w stanach eksploatacji oraz wykładnicze funkcje niezawodności. Ponadto, zbudowany został algorytm dla przykładowej oceny niezawodności systemu. Zbadane zostały zbieżność estymatora średniej dla metody Monte Carlo, przeprowadzona została estymacja przedziałowa oraz wyznaczony został błąd aproksymacji. Przedstawione zostało podejście, oparte na tzw. asymptotycznej wariancji i konstrukcji asymptotycznych przedziałów ufności.

2.2.1. Generowanie procesu eksploatacji systemu

W celu zastosowania podejścia symulacyjnego do procesu eksploatacji systemu modelowanego analitycznie w Rozdziale 2.1.1, przez $z_b = z_b(q)$, $b \in \{1, 2, \dots, \nu\}$, oznaczamy realizację początkowego stanu eksploatacyjnego procesu eksploatacji w chwili $t = 0$. Następnie, wybieramy ten początkowy stan eksploatacyjny generując liczby losowe z rozkładu $[p_b(0)]_{1 \times \nu}$ zgodnie z (1)-(2). Realizacje te są generowane przy użyciu poniższej procedury

$$z_b(q) = \begin{cases} z_1, & 0 \leq q < p_1(0), \\ z_2, & p_1(0) \leq q < p_1(0) + p_2(0), \\ \vdots & \vdots \\ z_v, & \sum_{i=1}^{v-1} p_i(0) \leq q \leq 1, \end{cases} \quad (20)$$

gdzie q jest losowo generowaną liczbą z rozkładu równomiernego na przedziale $\langle 0,1 \rangle$.
Następny stan eksploatacyjny $z_l = z_l(g)$, $l \in \{1,2,\dots,v\}$, $l \neq b$, otrzymujemy generując liczbę losową z rozkładu $[p_{bl}]_{v \times v}$ zgodnie z (3), w zależności od poprzedniego stanu eksploatacyjnego, przy użyciu następująco zdefiniowanej procedury

$$z_l(g) = \begin{cases} z_2, & 0 \leq g < p_{12}, \\ z_3, & p_{12} \leq g < p_{12} + p_{13}, \\ \vdots & \vdots \\ z_v, & \sum_{i=1}^{v-1} p_{bi} \leq g \leq 1, \end{cases} \quad \text{jeśli } z_b(q) = z_1; \quad (21)$$

$$z_l(g) = \begin{cases} z_1, & 0 \leq g < p_{b1}, \\ \vdots & \vdots \\ z_{b-1}, & \sum_{i=1}^{b-2} p_{bi} \leq g < \sum_{i=1}^{b-1} p_{bi}, \\ z_{b+1}, & \sum_{i=1}^{b-1} p_{bi} \leq g < \sum_{i=1}^{b+1} p_{bi}, \\ \vdots & \vdots \\ z_v, & \sum_{i=1}^{v-1} p_{bi} \leq g \leq 1, \end{cases} \quad \text{jeśli } z_b(q) = z_2, z_3, \dots, z_{v-1}; \quad (22)$$

$$z_l(g) = \begin{cases} z_1, & 0 \leq g < p_{v1}, \\ z_2, & p_{v1} \leq g < p_{v1} + p_{v2} \\ \vdots & \vdots \\ z_{v-1}, & \sum_{i=1}^{v-2} p_{vi} \leq g \leq 1, \end{cases} \quad \text{jeśli } z_b(q) = z_v, \quad (23)$$

gdzie g jest losowo generowaną liczbą z rozkładu równomiernego na przedziale $\langle 0,1 \rangle$.
Ponadto, po ustaleniu początkowego stanu eksploatacyjnego z_b oraz stanu następnego z_l zgodnie z procedurami (20)-(23), oznaczamy przez θ_{bl} , $b, l \in \{1,2,\dots,v\}$, $b \neq l$, realizację warunkowego czasu Θ_{bl} , $b, l \in \{1,2,\dots,v\}$, $b \neq l$, przebywania procesu eksploatacji systemu $Z(t)$ w stanie eksploatacyjnym z_b , przy warunku, że następne przejście nastąpi do stanu eksploatacyjnego z_l . Losowe warunkowe czasy Θ_{bl} , $b, l \in \{1,2,\dots,v\}$, $b \neq l$, procesu eksploatacji systemu $Z(t)$ generowane są za pomocą dystrybuanty $H_{bl}(t)$, $b, l \in \{1,2,\dots,v\}$, $b \neq l$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$, określonej przez (4).

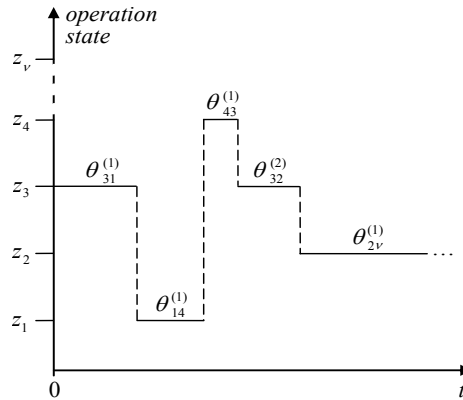
W przypadku rozkładu wykładniczego

$$H_{bl}(t) = 1 - \exp[-\alpha_{bl}t], \quad t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad (24)$$

używając metody odwracania dystrybuanty, otrzymujemy

$$\theta_{bl} = -\frac{1}{\alpha_{bl}} \ln[1-h], \quad b, l \in \{1, 2, \dots, \nu\}, \quad b \neq l. \quad (25)$$

Przykładowe przedstawienie procesu eksploatacji systemu zilustrowane zostało na Rysunku 2. Składa się ono z realizacji początkowego stanu eksploatacyjnego (z_3), realizacji sekwencji zmian stanów eksploatacyjnych ($z_3, z_1, z_4, z_3, z_2, \dots$) oraz realizacji czasów przebywania w poszczególnych stanach eksploatacyjnych.



Rys. 2. Przykładowe przedstawienie procesu eksploatacji systemu

2.2.2. Generowanie procesu zmian stanów niezawodnościowych systemu w poszczególnych stanach eksploatacyjnych

W celu otrzymania Ξ , $\Xi \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ realizacji bezwarunkowych czasów zdatności $T(u)$, $u = 1, 2, \dots, z$, systemu, musimy wykonać Ξ replikacji przebiegu symulacji Monte Carlo związanych z generowaniem realizacji procesu eksploatacji systemu oraz realizacji warunkowych czasów zdatności elementów systemu.

Realizacje $[t_i(u)]_{\xi}^{(b)}$, $i = 1, 2, \dots, \xi$, $u = 1, 2, \dots, z$, $b \in \{1, 2, \dots, \nu\}$, $\xi = 1, 2, \dots, \Xi$, warunkowych czasów zdatności $[T_i(u)]^{(b)}$ elementów E_i , w podzbiórach stanów niezawodnościowych zmiennych w różnych stanach eksploatacyjnych z_b , $b \in \{1, 2, \dots, \nu\}$, są generowane zgodnie z metodą odwracania dystrybuanty

$$[t_i(u)]_{\xi}^{(b)} = ([F_i(f, u)]^{(b)})^{-1} = (1 - [R_i(f, u)]^{(b)})^{-1},$$

$$i = 1, 2, \dots, \xi, \quad u = 1, 2, \dots, z, \quad b \in \{1, 2, \dots, \nu\}, \quad \xi = 1, 2, \dots, \Xi, \quad (26)$$

gdzie $([F_i(f, u)]^{(b)})^{-1}$ jest funkcją odwrotną do dystrybuanty

$$[F_i(f, u)]^{(b)} = 1 - [R_i(f, u)]^{(b)},$$

będącej funkcją warunkowego czasu zdatności $[T_i(u)]^{(b)}$ elementu, natomiast f jest losowo generowaną liczbą z rozkładu równomiernego na przedziale $(0, 1)$.

W przypadku rozkładu wykładniczego

$$[F_i(f, u)]^{(b)} = 1 - \exp[-[\lambda_i(u)]^{(b)}f], \quad i = 1, 2, \dots, \xi, \quad u = 1, 2, \dots, z, \quad b \in \{1, 2, \dots, \nu\}, \quad (27)$$

realizacje warunkowych czasów zdatności elementu systemu przyjmują następującą formę

$$[t_i(u)]_\xi^{(b)} = -\frac{1}{[\lambda_i(u)]^{(b)}} \ln(1-f), \quad i = 1, 2, \dots, \xi, \quad u = 1, 2, \dots, z, \quad b \in \{1, 2, \dots, \nu\},$$

$$\xi = 1, 2, \dots, \Xi, \quad (28)$$

gdzie $[\lambda_i(u)]^{(b)}$, $i = 1, 2, \dots, \xi$, $u = 1, 2, \dots, z$, $b \in \{1, 2, \dots, \nu\}$, są intensywnościami wyjścia elementów systemu z podzbiorów stanów niezawodnościowych $\{u, u+1, \dots, z\}$, natomiast f jest losowo generowaną liczbą z rozkładu równomiernego na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

Realizacje $[t(u)]_\xi$, $u = 1, 2, \dots, z$, $\xi = 1, 2, \dots, \Xi$, warunkowych czasów zdatności systemu $T(u)$ w podzbiorach stanów niezawodnościowych $\{u, u+1, \dots, z\}$ zależą od realizacji $[t_i(u)]_\xi^{(b)}$, $i = 1, 2, \dots, \xi$, $u = 1, 2, \dots, z$, $b \in \{1, 2, \dots, \nu\}$, $\xi = 1, 2, \dots, \Xi$, warunkowych czasów zdatności $[T_i(u)]^{(b)}$ elementów systemu i są obliczane z niejawnego wyrażenia

$$[t(u)]_\xi = t([t_i(u)]_\xi^{(b)}, p_b(0), p_{bl}, \theta_{bi}; u = 1, 2, \dots, z, i = 1, 2, \dots, \xi, b, l \in \{1, 2, \dots, \nu\},$$

$$b \neq l, \xi = 1, 2, \dots, \Xi), \quad (29)$$

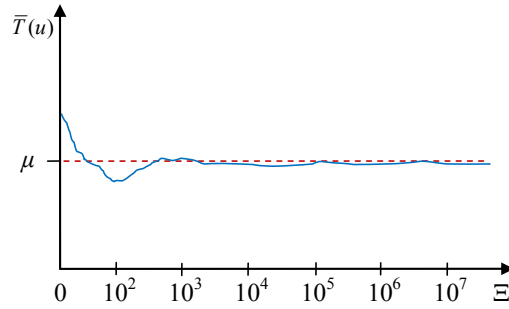
przyjmując odpowiednią jawną postać zależną od realizacji procesu eksploatacji systemu oraz struktury systemu, która jest różna w różnych stanach eksploatacyjnych z_b , $b \in \{1, 2, \dots, \nu\}$.

2.2.3. Dokładność metody Monte Carlo

Metoda symulacji Monte Carlo zapewnia przybliżone wyniki ze zbieżnością kontrolowaną przez liczbę realizacji. Załóżmy, że losową wielkością próby jest Ξ , $\Xi \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, natomiast czasy zdatności systemu $[T(u)]_\xi$, $u \in \{1, 2, \dots, z\}$, $\xi = 1, 2, \dots, \Xi$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, takiej samej wartości oczekiwanej μ i skończonym odchyleniu standardowym σ . Następnie, zgodnie z silnym prawem wielkich liczb i Centralnym Twierdzeniem Granicznym, gdy Ξ zbiega do nieskończoności, to zmienna losowa postaci

$$\hat{T}(u) = \frac{1}{\Xi} \sum_{\xi=1}^{\Xi} [T(u)]_\xi, \quad u \in \{1, 2, \dots, z\}, \quad (30)$$

reprezentująca empiryczne wartości średnie warunkowych czasów zdatności systemu w podziorze stanów niezawodnościowych $\{u, u+1, \dots, z\}$, zbiega silnie według rozkładu prawdopodobieństwa do wartości oczekiwanej μ . Stąd, zmienna losowa $\hat{T}(u)$, $u \in \{1, 2, \dots, z\}$, jest statystyką oszacowującą μ . Ponadto, $E[\hat{T}(u)] = \mu$, $D[\hat{T}(u)] = \frac{\sigma}{\sqrt{\Xi}}$ oraz dla dostatecznie dużej próby losowej, zbiega ona według rozkładu do rozkładu normalnego.



Rys. 3. Przykładowe średnie czasy zdatności systemu dla różnych wielkości Ξ

Błąd aproksymacji metody Monte Carlo maleje w zależności od liczby replikacji algorytmu symulacyjnego, przy czym wskaźnik zbieżności wynosi $O(\Xi^{-1/2})$. Możemy zatem zapisać, że błąd standardowy $\hat{T}(u)$ maleje w tempie $\Xi^{-1/2}$, gdzie Ξ oznacza wielkość próbek. Stąd, dla $\hat{T}(u)$ otrzymujemy estymację punktową $\mu \pm \frac{\sigma}{\sqrt{\Xi}}$.

Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego Lindeberg'a-Léviiego i zakładając przedział ufności $1 - \alpha = 0.95$, otrzymujemy przybliżony przedział ufności dla μ

$$\mu \in \left\langle \hat{T}(u) - \frac{1.96s}{\sqrt{\Xi}}; \hat{T}(u) + \frac{1.96s}{\sqrt{\Xi}} \right\rangle,$$

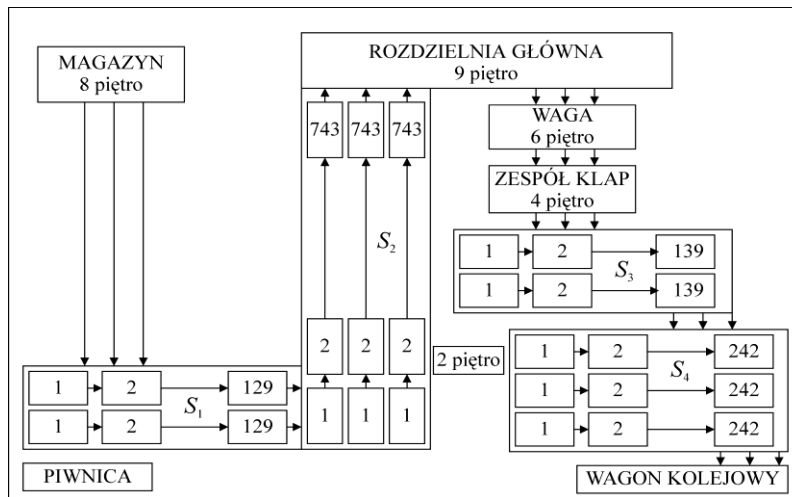
Jeśli założymy, że dokładność oszacowania jest równa d , możemy określić minimalny rozmiar próby $\Xi \geq \frac{1.96^2 s^2}{d^2}$, z prawdopodobieństwem $1 - \alpha = 0.95$.

2.3. Ocena niezawodności portowego systemu transportu zboża

Metody analityczna i symulacyjna rozprawy zostały zastosowane do oszacowania charakterystyk niezawodności portowego systemu transportu zboża, który jest typowym systemem złożonym charakteryzującym się zmiennym w czasie procesem eksploatacji.

2.3.1. Opis portowego systemu transportu zboża

Portowy system transportu zboża jest podstawowym obiektem Bałtyckiego Terminalu Zbożowego Portu Gdynia przeznaczonym do obsługi eksportu i importu zboża. W procesie załadunku uczestniczy system składający się z następujących podsystemów transportowych systemu: S_1 - poziome przenośniki taśmowe typu 1, S_2 - pionowe podnośniki kubelkowe, S_3 - poziome przenośniki taśmowe typu 2, S_4 - przenośniki ślimakowe.



Rys. 4. Schemat struktury niezawadnościowej portowego systemu transportu zboża

2.3.2. Parametry procesu eksploatacji portowego systemu transportu zboża

Portowy system transportu zboża jest systemem z trzema stanami niezawadnościowymi i eksploatowany jest w trzech stanach eksploatacyjnych ($b = 3$). Na podstawie danych uzyskanych od ekspertów (użytkowników systemu) przeprowadzona została przybliżona identyfikacja parametrów procesu eksploatacji tego systemu polegająca na oszacowaniu:

- prawdopodobieństw początkowych w chwili $t = 0$ danych w postaci wektora

$$[p_b(0)]_{1 \times 3} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right];$$

- prawdopodobieństw przejść pomiędzy wyróżnionymi stanami eksploatacyjnymi, które dane są w poniższej macierzy

$$[p_{bl}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix};$$

- warunkowych dystrybuant czasów Θ_{bl} , $b, l = 1, 2, 3$, przebywania procesu $Z(t)$ w stanie eksploatacyjnym z_b , przy warunku, że następne przejście nastąpi do stanu eksploatacyjnego z_l , $l = 1, 2, 3$, które dane są w postaci następującej macierzy

$$[H_{bl}(t)]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \exp[-5t] & 1 - \exp[-10t] \\ 1 - \exp[-40t] & 0 & 1 - \exp[-50t] \\ 1 - \exp[-10t] & 1 - \exp[-20t] & 0 \end{bmatrix}, t \in \langle 0, \infty \rangle.$$

2.3.3. Parametry niezawadnościowe portowego systemu transportu zboża

System transportu zboża jest systemem z trzema stanami niezawadnościowymi:

- stan niezawodnościowy 2 zapewniający najlepszą jakość pracy systemu;
- stan niezawodnościowy 1 zapewniający gorszą jakość pracy systemu, wymuszoną przez wysypywanie się zboża z taśmy;
- stan niezawodnościowy 0 powodujący niezdatność systemu.

Przeprowadzona została identyfikacja parametrów niezawodnościowych portowego systemu transportu zboża polegająca na oszacowaniu funkcji niezawodności jego elementów. W oparciu o tę identyfikację oszacowane zostały przybliżone warunkowe funkcje niezawodności poszczególnych podsystemów portowego systemu transportu zboża. Następnie oszacowane zostały przybliżone funkcje niezawodności całego systemu w poszczególnych stanach eksploatacyjnych, wartości średnie i odchylenia standardowe czasów przebywania systemu w podzbiórach stanów niezawodnościowych, oraz wartości średnie czasów przebywania systemu w poszczególnych stanach niezawodnościowych.

2.3.4. Analityczna ocena niezawodności portowego systemu transportu zboża

Na podstawie danych uzyskanych od ekspertów w oparciu o semi-markowski model procesu eksploatacji oszacowane zostały graniczne wartości prawdopodobieństw chwilowych przebywania procesu $Z(t)$ w poszczególnych stanach eksploatacyjnych, które wynoszą odpowiednio

$$p_1 = \frac{17}{32}, \quad p_2 = \frac{7}{64}, \quad p_3 = \frac{23}{64}. \quad (31)$$

Biorąc pod uwagę strukturę niezawodnościową portowego systemu transportu zboża, został określony jego warunkowy czas zdatności w poszczególnych stanach eksploatacyjnych

$$[T(u)]^{(1)} = \min \left\{ \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \min_{1 \leq j \leq 129} \{[T_{ij}^{(1)}(u)]^{(1)}\} \right\}, \max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \min_{1 \leq j \leq 743} \{[T_{ij}^{(2)}(u)]^{(1)}\} \right\}, \right. \\ \left. \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \min_{1 \leq j \leq 139} \{[T_{ij}^{(3)}(u)]^{(1)}\} \right\}, \max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \min_{1 \leq j \leq 242} \{[T_{ij}^{(4)}(u)]^{(1)}\} \right\} \right\}, \quad u = 1, 2.$$

$$[T(u)]^{(2)} = \min \left\{ \min_{1 \leq j \leq 129} \{[T_{ij}^{(1)}(u)]^{(2)}\}, \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \min_{1 \leq j \leq 743} \{[T_{ij}^{(2)}(u)]^{(2)}\} \right\}, \min_{1 \leq j \leq 139} \{[T_{ij}^{(3)}(u)]^{(2)}\}, \right. \\ \left. \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \min_{1 \leq j \leq 242} \{[T_{ij}^{(4)}(u)]^{(2)}\} \right\} \right\}, \quad u = 1, 2.$$

$$[T(u)]^{(3)} = \min \left\{ \min_{1 \leq j \leq 129} \{[T_{ij}^{(1)}(u)]^{(3)}\}, \min_{1 \leq j \leq 743} \{[T_{ij}^{(2)}(u)]^{(3)}\}, \min_{1 \leq j \leq 139} \{[T_{ij}^{(3)}(u)]^{(1)}\}, \right. \\ \left. \min_{1 \leq j \leq 242} \{[T_{ij}^{(4)}(u)]^{(3)}\} \right\}, \quad u = 1, 2.$$

Ostatecznie, bezwarunkowa wielostanowa funkcja niezawodności portowego systemu transportu zboża ma postać

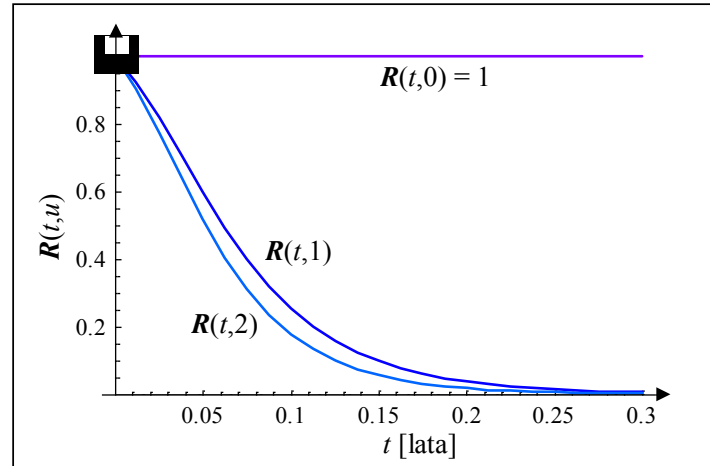
$$\mathbf{R}(t, \cdot) = [1, \mathbf{R}(t, 1), \mathbf{R}(t, 2)], \quad t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

gdzie

$$R(t,1) \cong \frac{17}{32} [R(t,1)]^{(1)} + \frac{7}{64} [R(t,1)]^{(2)} + \frac{23}{64} [R(t,1)]^{(3)}, t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

$$R(t,2) \cong \frac{17}{32} [R(t,2)]^{(1)} + \frac{7}{64} [R(t,2)]^{(2)} + \frac{23}{64} [R(t,2)]^{(3)}, t \in \langle 0, \infty \rangle.$$

Zachowanie się funkcji niezawodności $R(t, \cdot)$ zilustrowane jest na Rysunku 5.



Rys. 5. Wykres funkcji niezawodności $R(t, \cdot)$ portowego systemu transportu zboża

Bezwarunkowe wartości średnie i odchylenia standardowe czasów przebywania portowego systemu transportu zboża w podzbiorach stanów niezawodnościowych wynoszą

$$\mu(1) = \frac{17}{32} \cdot 0.0813 + \frac{7}{64} \cdot 0.0861 + \frac{23}{64} \cdot 0.0607 \cong 0.0744 \text{ roku} \cong 27 \text{ dni},$$

$$\sigma(1) \cong 0.0572 \text{ roku} \cong 21 \text{ dni},$$

$$\mu(2) = \frac{17}{32} \cdot 0.0691 + \frac{7}{64} \cdot 0.0729 + \frac{23}{64} \cdot 0.0493 \cong 0.0624 \text{ roku} \cong 23 \text{ dni},$$

$$\sigma(2) \cong 0.0479 \text{ roku} \cong 17 \text{ dni}.$$

Natomiast bezwarunkowe wartości średnie czasów przebywania portowego systemu transportu zboża w poszczególnych stanach niezawodnościowych wynoszą

$$\bar{\mu}(1) \cong \mu(1) - \mu(2) = 0.0120 \text{ roku} \cong 4 \text{ dni}, \quad \bar{\mu}(2) \cong \mu(2) = 0.0624 \text{ roku} \cong 23 \text{ dni}.$$

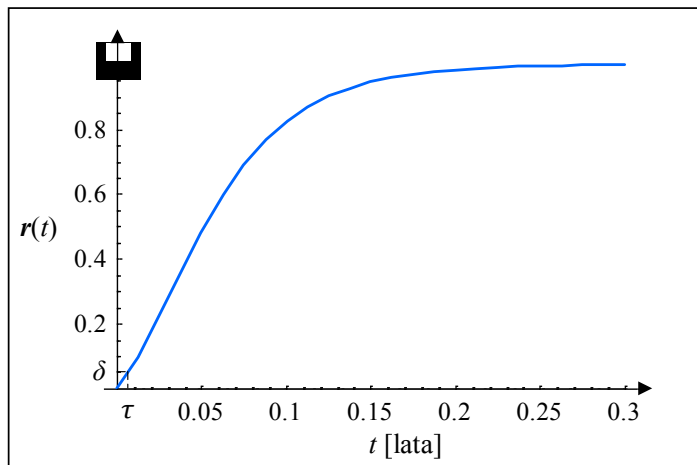
Jeśli krytycznym stanem niezawodnościowym jest $r = 1$, to funkcja ryzyka systemu zgodnie z (11) przyjmuje postać

$$r(t) \cong 1 - R(t,1).$$

Stąd chwila, kiedy ryzyko przekroczy poziom krytyczny $\delta = 0.05$ wynosi

$$\tau = r^{-1}(\delta) \cong 0.0066 \text{ roku} \cong 2.41 \text{ dni}.$$

Zachowanie się funkcji ryzyka $r(t)$ zilustrowane jest na Rysunku 6.



Rys. 6. Wykres funkcji ryzyka $r(t)$ portowego systemu transportu zboża

2.3.5. Symulacyjna ocena Monte Carlo niezawodności portowego systemu transportu zboża

Pierwszym krokiem metody symulacji Monte Carlo zastosowanej do generowania procesu eksploatacji systemu transportu zboża, jest wybranie początkowego stanu $z_b = z_b(q)$, $b \in \{1,2,3\}$, tego procesu w chwili $t = 0$, zgodnie z procedurą

$$z_b(q) = \begin{cases} z_1, & 0 \leq q < \frac{1}{3} \\ z_2, & \frac{1}{3} \leq q < \frac{2}{3} \\ z_3, & \frac{2}{3} \leq q \leq 1, \end{cases}$$

gdzie q jest losowo generowaną liczbą z rozkładu równomiernego na przedziale $\langle 0,1 \rangle$. Następnym stanem eksploatacyjnym $z_l = z_l(g)$, $l \in \{1,2,3\}$, $l \neq b$, otrzymujemy przy użyciu procedury

$$z_l(g) = \begin{cases} z_2, & 0 \leq g < \frac{1}{3} \\ z_3, & \frac{1}{3} \leq g \leq 1, \end{cases} \quad \text{jeśli } z_b(q) = z_1;$$

$$z_l(g) = \begin{cases} z_1, & 0 \leq g < \frac{4}{9} \\ z_3, & \frac{4}{9} \leq g \leq 1, \end{cases} \quad \text{jeśli } z_b(q) = z_2;$$

$$z_l(g) = \begin{cases} z_1, & 0 \leq g < \frac{1}{3} \\ z_2, & \frac{1}{3} \leq g \leq 1, \end{cases} \quad \text{jeśli } z_b(q) = z_3,$$

gdzie g , q są losowo generowanymi liczbami z rozkładu równomiernego na przedziale $\langle 0,1 \rangle$.

Po ustaleniu początkowego stanu eksploatacyjnego z_b oraz stanu następnego z_l , losowe warunkowe czasy Θ_{bl} procesu eksploatacji systemu $Z(t)$ generowane są korzystając z dystrybuant $H_{bl}(t)$, $b, l \in \{1, 2, 3\}$, $b \neq l$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$.

Ponieważ realizacje θ_{bl} czasów Θ_{bl} pracy systemu mierzone są w dniach, a realizacje czasów zdatności elementów systemu podane są w latach, należy przekonwertować jednostki, aby zapewnić poprawność symulacji. Stąd, otrzymujemy

$$\theta_{bl}(h) = -\frac{365}{\alpha_{bl}} \ln[1 - h].$$

W szczególności

$$\theta_{12}(h) = -73 \ln[1 - h], \quad \theta_{13}(h) = -36.5 \ln[1 - h], \quad \theta_{21}(h) = -9.125 \ln[1 - h],$$

$$\theta_{23}(h) = -7.3 \ln[1 - h], \quad \theta_{31}(h) = -36.5 \ln[1 - h], \quad \theta_{32}(h) = -18.25 \ln[1 - h],$$

gdzie h jest losowo generowaną liczbą z rozkładu równomiernego na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

Następnie, po ustaleniu początkowego stanu eksploatacyjnego z_b oraz stanu następnego z_l , generowana jest realizacja $\theta_{bl}^{(k)}(h)$ warunkowego czasu Θ_{bl} przebywania procesu eksploatacji systemu w stanie z_b , przy warunku, że następne przejście nastąpi do stanu z_l , gdzie k , $k \in \mathbb{N}$,

jest liczbą zmian stanów procesu eksploatacji $Z(t)$. W celu otrzymania Ξ , $\Xi \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

realizacji bezwarunkowych czasów zdatności $T(u)$, $u = 1, 2$, systemu, musimy wykonać Ξ replikacji przebiegu symulacji Monte Carlo związanych z generowaniem realizacji procesu eksploatacji systemu oraz generowaniem realizacji warunkowych czasów zdatności elementów systemu.

Realizacje $[t_{ij}^{(\nu)}(u)]_{\xi}^{(b)}$, $b \in \{1, 2, 3\}$, $i = 1, 2, \dots, k^{(b)}$, $j = 1, 2, \dots, l_i^{(b)}$, $\xi = 1, 2, \dots, \Xi$, $u = 1, 2$, $\nu = 1, 2, 3, 4$, warunkowych czasów zdatności $[T_{ij}^{(\nu)}(u)]^{(b)}$ elementów systemu w podzbiorach stanów niezawodnościowych generowane są zgodnie z metodą odwracania dystrybuanty funkcji wykładniczej. Realizacje $[t(u)]_{\xi}^{(b)}$ warunkowych czasów zdatności $[T(u)]^{(b)}$ systemu przyjmują odpowiednią postać zależną od realizacji procesu eksploatacji systemu oraz struktury systemu, która jest zmienna w różnych stanach eksploatacyjnych z_b .

Tabela 1. Minimalna ilość iteracji Ξ dla systemu, zakładając $s(2) \cong 20.7685$ dni, różne przedziały ufności $1 - \alpha$ oraz różne dokładności oszacowania d .

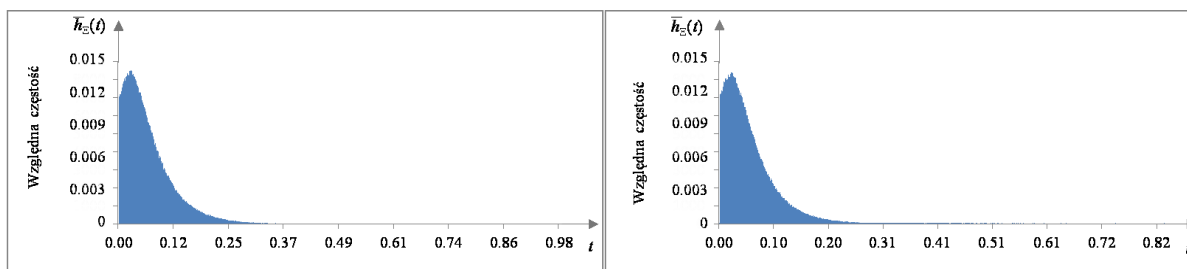
Minimalna ilość iteracji Ξ		Dokładność oszacowania d			
		0.1	0.05	0.025	0.01
Przedział ufności $1 - \alpha$	0.90	116 011	464 043	1 856 171	11 601 068
	0.95	165 700	662 800	2 651 200	16 569 997
	0.98	234 166	936 661	3 746 642	23 416 507
	0.99	287 111	1 148 444	4 593 775	28 711 090

Jeśli założymy, że dokładność oszacowania jest równa $d = 5\%$, możemy określić minimalny rozmiar próby

$$\Xi \geq \frac{1.96^2 s^2}{d^2} \cong \frac{1.96^2 \cdot 20.7685^2}{0.05^2} \cong 662\,800,$$

z prawdopodobieństwem $1 - \alpha = 0.95$.

Realizacje $[t(u)]_\xi$, $\xi = 1, 2, \dots, \Xi$, $u = 1, 2$, czasów zdatności systemu są przedstawione w formie histogramów na Rysunku 7.



Rys. 7. Wykres realizacji histogramu zmiennej losowej $T(u)$ portowego systemu transportu zboża

Bezwarunkowa wielostanowa funkcja niezawodności portowego systemu transportu zboża ma postać

$$\mathbf{R}_s(t, \cdot) = [1, \mathbf{R}_s(t, 1), \mathbf{R}_s(t, 2)], \quad t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

o składowych

$$\mathbf{R}_s(t, u) \cong 1 - \frac{1}{\Xi} \# \{ \xi : [t(u)]_\xi < t, \xi \in \{1, 2, \dots, \Xi\} \}, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad u = 1, 2.$$

Bezwarunkowe wartości oczekiwane czasów przebywania systemu w podzbiorach stanów niezawodnościowych wynoszą:

$$\mu_s(1) \cong 24.46 \text{ dni}, \quad \mu_s(2) \cong 20.48 \text{ dni},$$

natomiast w poszczególnych stanach niezawodnościowych wynoszą:

$$\bar{\mu}_s(1) \cong 3.98 \text{ dni}, \quad \bar{\mu}_s(2) \cong 20.48 \text{ dni}.$$

3. Niezawodność wykładniczego systemu złożonego – podejście analityczne

3.1. Proces eksploatacji systemu

Oznaczamy przez

$$\phi_b^{(\omega)}(t) = P(\bar{\Theta}_b^{(\omega)} < t),$$

rozkład prawdopodobieństwa zmiennych losowych

$$\bar{\Theta}_b^{(\omega)} = \Theta_b^{(1)} + \Theta_b^{(2)} + \dots + \Theta_b^{(\omega)},$$

gdzie $\Theta_b^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, \omega$, $\omega = 1, 2, \dots$, $b = 1, 2, \dots, \nu$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie

$$P(\Theta_b^{(i)} < t) = P(\Theta_b < t) = H_b(t) = \sum_{l=1}^{\nu} p_{bl} H_{bl}(t), t \in \langle 0, \infty \rangle.$$

Oznaczamy $N_b(t)$, $b = 1, 2, \dots, \nu$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$, warunkową liczbę zmian stanów procesu eksploatacyjnego do chwili t , podczas gdy proces ten znajduje się w stanie z_b , oraz przez $N(t)$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$, bezwarunkową liczbę zmian stanów procesu eksploatacyjnego do chwili t .

Twierdzenie 1.

Jeśli czasy Θ_{bl} pracy elementów systemu mają skończoną średnią M_b i odchylenie standardowe D_b to rozkład $N_b(t)$ liczby zmian stanów procesu eksploatacyjnego do chwili t , w stanie z_b jest asymptotycznie normalny $N(m_b, \sigma_b)$, ze średnią

$$m_b = \frac{t}{M_b}, t \in \langle 0, \infty \rangle, b = 1, 2, \dots, \nu,$$

i odchyleniem standardowym

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{(D_b)^2 t}{(M_b)^3}} = \frac{D_b \sqrt{t}}{M_b \sqrt{M_b}}.$$

Twierdzenie 2.

Jeśli czasy Θ_{bl} pracy elementów systemu mają rozkłady wykładnicze, to rozkład $N_b(t)$ liczby zmian stanów procesu eksploatacyjnego do chwili t , $t \in \langle 0, \infty \rangle$, w stanie z_b jest asymptotycznie normalny $N(m_b, \sigma_b)$ o dystrybuancie

$$P(N_b(t) < k) \cong F_{N(0,1)}\left(\frac{k - m_b}{\sigma_b}\right) = F_{N(0,1)}\left(\frac{\sqrt{M_b}(kM_b - t)}{D_b \sqrt{t}}\right),$$

gdzie $F_{N(0,1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt.$

Wniosek 1.

Jeśli rozkłady czasów Θ_{bl} przebywania procesu $Z(t)$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$, w stanie eksploatacyjnym z_b przy warunku, że następne przejście nastąpi do stanu eksploatacyjnego z_l , $b, l = 1, 2, \dots, \nu$, $b \neq l$, są wykładnicze, wtedy rozkład $N(t)$ bezwarunkowej liczby zmian stanów procesu $Z(t)$ do chwili t , jest dany następująco

$$P(N(t) = k) \cong \sum_{b=1}^{\nu} p_b P(N_b(t) = k), k = 0, 1, \dots,$$

gdzie p_b są granicznymi wartościami prawdopodobieństw chwilowych $p_b(t)$ przebywania procesu $Z(t)$ w poszczególnych stanach eksploatacyjnych.

3.2. Niezawodność wykładniczego systemu złożonego

Warunkowa wielostanowa funkcja niezawodności elementu E_i jest zdefiniowana wektorem

$$[R_i(t, \cdot)]_k^{(b)} = [1, [R_i(t, 1)]_k^{(b)}, \dots, [R_i(t, z)]_k^{(b)}],$$

o składowych

$$[R_i(t, u)]_k^{(b)} = P([T_i(u)]_k^{(b)} > t \mid Z(t) = z_b), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad u = 1, 2, \dots, z, \quad b = 1, 2, \dots, v, \\ k = 0, 1, \dots,$$

gdzie $[T_i(u)]_k^{(b)}$ jest zmienną losową reprezentującą czas przebywania elementu E_i systemu w podzbiorze stanów niezawodności $\{u, u+1, \dots, z\}$, podczas gdy proces eksploatacji $Z(t)$ systemu znajduje się w stanie eksploatacyjnym z_b , po k zmianach stanów tego procesu. Warunkowa funkcja niezawodności systemu wielostanowego jest zdefiniowana wektorem

$$[\mathbf{R}(t, \cdot)]_k^{(b)} = [1, [\mathbf{R}(t, 1)]_k^{(b)}, \dots, [\mathbf{R}(t, z)]_k^{(b)}],$$

o składowych

$$[\mathbf{R}(t, u)]_k^{(b)} = P([T(u)]_k^{(b)} > t \mid Z(t) = z_b, N(t) = k), \quad t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

gdzie $[T(u)]_k^{(b)}$, $u = 1, 2, \dots, z$, $b = 1, 2, \dots, v$, $k = 0, 1, \dots$, jest zmienną losową reprezentującą czas przebywania systemu w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$, podczas gdy proces eksploatacji $Z(t)$ systemu znajduje się w stanie eksploatacyjnym z_b , po k zmianach stanów tego procesu. Bezwarunkowa funkcja niezawodności systemu określona jest wektorem

$$\mathbf{R}(t, \cdot) = [1, \mathbf{R}(t, 1), \dots, \mathbf{R}(t, z)], \quad t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

o składowych

$$\mathbf{R}(t, u) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k) [\mathbf{R}(t, u)]_k \cong \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k) \left(\sum_{b=1}^v p_b [\mathbf{R}(t, u)]_k^{(b)} \right), \quad u = 1, 2, \dots, z,$$

gdzie $P(N(t) = k)$ jest rozkładem bezwarunkowej liczby $N(t)$ zmian stanów procesu eksploatacyjnego do chwili t .

Uogólnieniem tych wyników i rozszerzeniem możliwości ich stosowania jest przyjęcie założenia, że bezwarunkowe funkcje niezawodności systemu są nadal kawałkami-wykładnicze (starzenie się), natomiast intensywności wyjścia elementów systemu z poszczególnych stanów niezawodności zależą od "przeszłości", w tym sensie, że zależą od liczby

$$k, \quad k = 0, 1, \dots$$

zmian stanów procesu eksploatacyjnego w danej chwili czasu. W pracy "pamięć" elementów wyrażona jest we wzorze na intensywności ich starzenia się

$$[\lambda_i(u)]_k^{(b)} = [\lambda_i(u)]^{(b)} \cdot \frac{2k+1}{k+1},$$

gdzie "pamięć" elementów systemu jest wyrażona poprzez wprowadzenie współczynników $\frac{2k+1}{k+1}$, $k=0,1,\dots$. Wtedy dla $k=0,1,\dots$, intensywności wyjścia z podzbioru stanów niezawodnościowych $\{u, u+1, \dots, z\}$ są pomnożone odpowiednio przez $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots$.

3.3. Ocena niezawodności portowego systemu transportu zboża – kontynuacja

Bezwarunkowa wielostanowa funkcja niezawodności elementów portowego systemu transportu zboża określona jest wektorem

$$[R_{ij}^{(\nu)}(t, \cdot)]_k^{(b)} = [1, [R_{ij}^{(\nu)}(t, 1)]_k^{(b)}, [R_{ij}^{(\nu)}(t, 2)]_k^{(b)}],$$

o składowych

$$[R_{ij}^{(\nu)}(t, u)]_k^{(b)} = \exp[-[\lambda_{ij}^{(\nu)}(u)]^{(b)} \cdot \frac{2k+1}{k+1} \cdot t], \quad k=0,1,\dots,$$

$$i=1,2,\dots,k^{(b)}, j=1,2,\dots,l_i^{(b)}, u=1,2, \nu=1,2,3,4, b=1,2,3,$$

zmiennych w różnych stanach eksploatacyjnych z_b , $b=1,2,3$, gdzie $k, k=0,1,\dots$, jest liczbą zmian stanów procesu eksploatacyjnego.

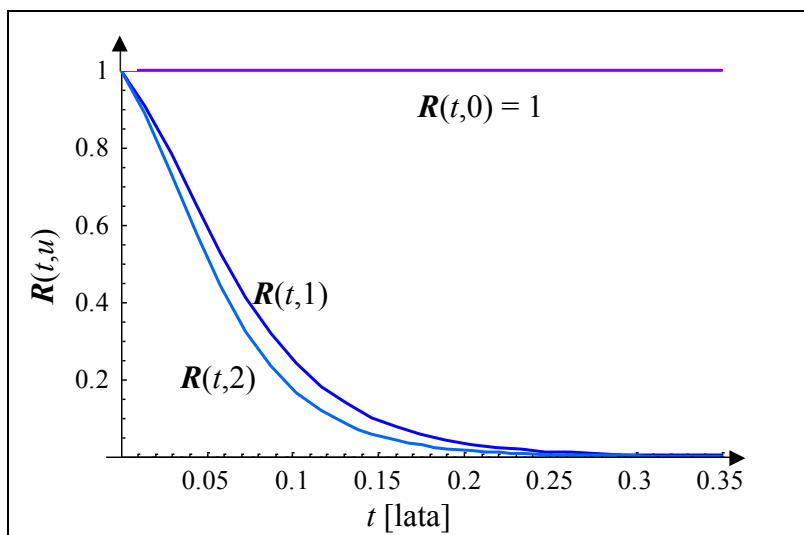
Bezwarunkowa wielostanowa funkcja niezawodności portowego systemu transportu zboża w przypadku, gdy czas eksploatacji systemu jest dostatecznie duży, ma postać

$$\mathbf{R}(t, \cdot) = [1, \mathbf{R}(t, 1), \mathbf{R}(t, 2)], \quad t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

o składowych

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t, u) &\cong \sum_{b=1}^3 p_b \left(\sum_{k=0}^{\infty} (P(N_b(t) = k) [\mathbf{R}(t, 1)]_k^{(b)}) \right) \\ &= \frac{17}{32} \sum_{k=0}^{\infty} (P(N_1(t) = k) [\mathbf{R}(t, u)]_k^{(1)}) + \frac{7}{64} \sum_{k=0}^{\infty} (P(N_2(t) = k) [\mathbf{R}(t, u)]_k^{(2)}) \\ &\quad + \frac{23}{64} \sum_{k=0}^{\infty} (P(N_3(t) = k) [\mathbf{R}(t, u)]_k^{(3)}) \\ &\cong \frac{17}{32} \sum_{k=0}^{10} ((\phi_1^{(k)}(t) - \phi_1^{(k+1)}(t)) [\mathbf{R}(t, u)]_k^{(1)}) + \frac{7}{64} \sum_{k=0}^{10} ((\phi_2^{(k)}(t) - \phi_2^{(k+1)}(t)) [\mathbf{R}(t, u)]_k^{(2)}) \\ &\quad + \frac{23}{64} \sum_{k=0}^{10} ((\phi_3^{(k)}(t) - \phi_3^{(k+1)}(t)) [\mathbf{R}(t, u)]_k^{(3)}), \end{aligned}$$

gdzie rozkład $P(N_b(t) = k)$ jest rozkładem warunkowej liczby $N_b(t)$ zmian stanów procesu eksploatacyjnego do chwili t .



Rys. 8. Wykres funkcji niezawodności $R(t, \cdot)$ portowego systemu transportu zboża

Bezwzględne wartości oczekiwane i odchylenia standardowe czasów przebywania systemu transportu zboża w podzbiorach stanów niezawodnościowych wynoszą

$$\mu(1) = \frac{17}{32} \cdot 0.0810 + \frac{7}{64} \cdot 0.0840 + \frac{23}{64} \cdot 0.0601 \cong 0.0738 \text{ roku} \cong 27 \text{ dni,}$$

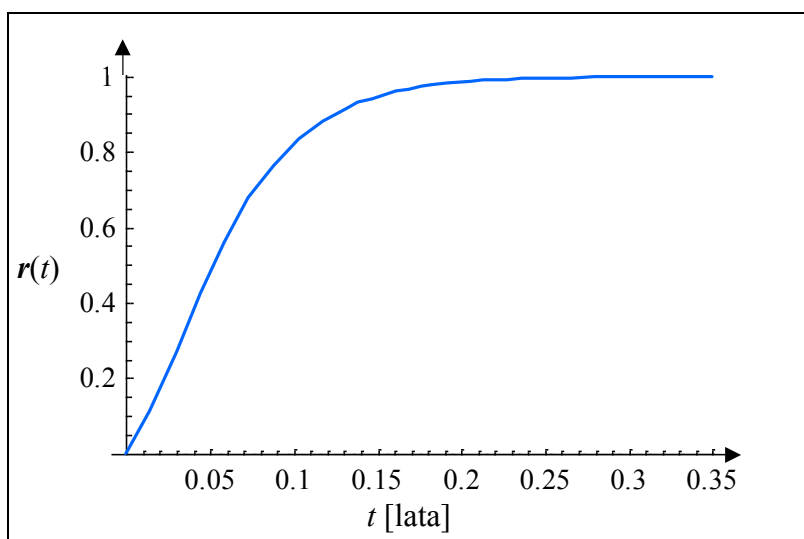
$$\sigma(1) \cong 0.0560 \text{ roku} \cong 21 \text{ dni;}$$

$$\mu(2) = \frac{17}{32} \cdot 0.0690 + \frac{7}{64} \cdot 0.0715 + \frac{23}{64} \cdot 0.0490 \cong 0.0621 \text{ roku} \cong 23 \text{ dni,}$$

$$\sigma(2) \cong 0.0472 \text{ roku} \cong 17 \text{ dni.}$$

Chwila, kiedy ryzyko przekroczy poziom krytyczny $\delta = 0.05$ wynosi

$$\tau = r^{-1}(\delta) \cong 0.0066 \text{ roku} \cong 2.40 \text{ dni.}$$



Rys. 9. Wykres funkcji ryzyka $r(t)$ portowego systemu transportu zboża

Bezwarunkowe wartości oczekiwane czasów przebywania systemu w podzbiorach stanów niezawodnościowych wynoszą:

- bez uwzględniania "pamięci":

$$\mu(1) \cong 27.16 \text{ dni}, \quad \mu(2) \cong 22.78 \text{ dni},$$

- uwzględniając zależność od "przeszłości":

$$\mu(1) \cong 26.94 \text{ dni}, \quad \mu(2) \cong 22.67 \text{ dni},$$

natomiast w poszczególnych stanach niezawodnościowych:

- bez uwzględniania "pamięci":

$$\bar{\mu}(1) \cong 4.38 \text{ dni}, \quad \bar{\mu}(2) \cong 22.78 \text{ dni},$$

- uwzględniając zależność od "przeszłości":

$$\bar{\mu}(1) \cong 4.27 \text{ dni}, \quad \bar{\mu}(2) \cong 22.67 \text{ dni}.$$

4. Niezawodność wykładniczego systemu złożonego – podejście Monte Carlo

4.1. Generowanie procesu eksploatacji systemu

Generowanie procesu eksploatacji systemu następuje zgodnie z procedurami zawartymi w rozdziale 2.2.1. Zanim jednak zostanie wygenerowana kolejna realizacja θ_{bl} , $b, l \in \{1, 2, \dots, \nu\}$, $b \neq l$, warunkowego czasu Θ_{bl} przebywania procesu eksploatacji systemu $Z(t)$ w stanie z_b , przy warunku, że następne przejście nastąpi do stanu z_l , wprowadzamy parametr k , $k \in \mathbb{N}$, odpowiadający liczbie zmian stanów procesu eksploatacji $Z(t)$.

4.2. Generowanie procesu zmian stanów niezawodnościowych systemu w poszczególnych stanach eksploatacyjnych

W przypadku rozkładu wykładniczego

$$[F_i(f, u)]_k^{(b)} = 1 - \exp[-[\lambda_i(u)]_k^{(b)} f], \quad i = 1, 2, \dots, \xi, \quad u = 1, 2, \dots, z, \quad b \in \{1, 2, \dots, \nu\}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

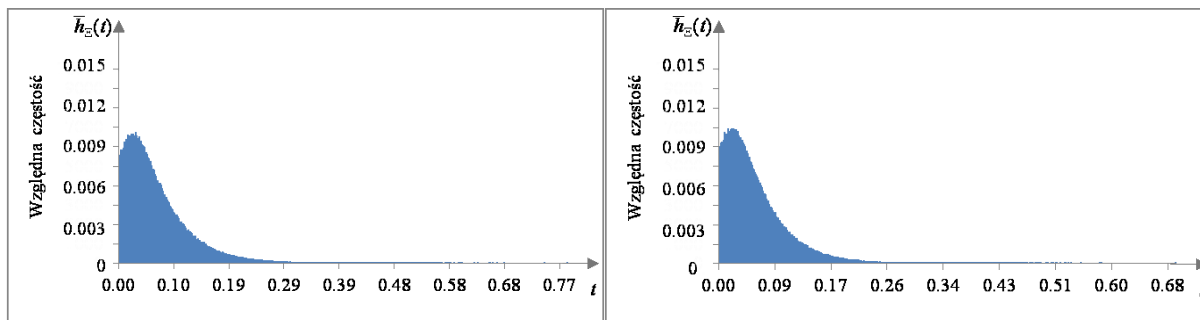
realizacje warunkowych czasów zdatności elementu systemu przyjmują następującą formę

$$[[t_i(u)]_k^{(b)}]_{\xi} = -\frac{1}{[\lambda_i(u)]_k^{(b)}} \ln[1 - f], \quad \xi = 1, 2, \dots, \Xi,$$

gdzie $[\lambda_i(u)]_k^{(b)}$, są intensywnościami wyjścia elementów systemu z podzbiorów stanów niezawodnościowych $\{u, u + 1, \dots, z\}$, natomiast f jest losowo generowaną liczbą z rozkładu równomiernego na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

4.3. Ocena niezawodności portowego systemu transportu zboża

Realizacje $[t(u)]_{\xi}$, $\xi = 1, 2, \dots, \Xi$, $u = 1, 2$, czasów zdatności systemu są przedstawione w formie histogramów na Rysunku 10.



Rys. 10. Wykres realizacji histogramu zmiennej losowej $T(u)$ portowego systemu transportu zboża

Bezwarunkowe wartości oczekiwane czasów przebywania systemu w podzbiorach stanów niezawodnościowych wynoszą

- bez uwzględniania "pamięci":

$$\mu_s(1) \cong 24.46 \text{ dni,}$$

$$\mu_s(2) \cong 20.48 \text{ dni;}$$

- uwzględniając zależność od "przeszłości":

$$\mu_s(1) \cong 24.35 \text{ dni,}$$

$$\mu_s(2) \cong 20.40 \text{ dni,}$$

Bezwarunkowe wartości średnie czasów przebywania systemu w poszczególnych stanach niezawodnościowych wynoszą

- bez uwzględniania "pamięci":

$$\bar{\mu}_s(1) \cong 3.98 \text{ dni,}$$

$$\bar{\mu}_s(2) \cong 20.48 \text{ dni;}$$

- uwzględniając zależność od "przeszłości":

$$\bar{\mu}_s(1) \cong 3.942 \text{ dni,}$$

$$\bar{\mu}_s(2) \cong 20.4035 \text{ dni.}$$

Bezwarunkowe wartości oczekiwane czasów przebywania systemu w podzbiorach stanów niezawodnościowych otrzymane metodą analityczną w Rozdziale 3 wynoszą:

$$\mu(1) \cong 26.9370 \text{ dni,}$$

$$\mu(2) \cong 22.6665 \text{ dni,}$$

natomiast w poszczególnych stanach niezawodnościowych wynoszą:

$$\bar{\mu}(1) \cong 4.2705 \text{ dni,}$$

$$\bar{\mu}(2) \cong 22.6665 \text{ dni.}$$

5. Niezawodność dowolnego systemu złożonego

5.1. Niezawodność dowolnego systemu złożonego – dyskusja nad możliwością podejścia analitycznego

5.1.1. Proces eksploatacji systemu

Lemat 1. Jeśli rozkłady czasów Θ_{bl} są wykładnicze

$$H_{bl}(t) = 1 - \exp[-\alpha_{bl}t], \quad t \in \langle 0, \infty \rangle, \quad b, l = 1, 2, \dots, v, \quad b \neq l,$$

wtedy czasy Θ_b mają rozkłady

$$H_b(t) = 1 - \sum_{l=1}^v p_{bl} \exp[-\alpha_{bl}t],$$

o wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym

$$M_b = \sum_{l=1}^v \frac{p_{bl}}{\alpha_{bl}},$$

$$D_b = \sqrt{2 \sum_{l=1}^v \frac{p_{bl}}{(\alpha_{bl})^2} - \left(\sum_{l=1}^v \frac{p_{bl}}{\alpha_{bl}} \right)^2}.$$

Ponadto czasy $\bar{\Theta}_b^{(\omega)}$ mają średnie i odchylenia standardowe

$$\bar{M}_b^{(\omega)} = \omega M_b,$$

$$\bar{D}_b^{(\omega)} = \sqrt{\omega} \cdot D_b, \quad \omega = 1, 2, \dots,$$

dla każdego ustalonego b , $b = 1, 2, \dots, v$.

Lemat 2. Jeśli rozkłady czasów Θ_{bl} są normalne

$$H_{bl}(t) = \frac{1}{D_{bl} \sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{(t-M_{bl})^2}{2D_{bl}^2}\right] dt, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle,$$

to średnie i odchylenia standardowe czasów $\bar{\Theta}_b^{(\omega)}$ są następujące

$$\bar{M}_b^{(\omega)} = \omega M_b,$$

$$\bar{D}_b^{(\omega)} = \sqrt{\omega} \cdot D_b, \quad \omega = 1, 2, \dots,$$

gdzie

$$M_b = \sum_{l=1}^v p_{bl} M_{bl},$$

$$D_b = \sqrt{\sum_{l=1}^v p_{bl}(M_{bl}^2 + D_{bl}^2) - \left(\sum_{l=1}^v p_{bl}M_{bl}\right)^2}$$

dla każdego ustalonego b , $b = 1, 2, \dots, v$.

Lemat 3. Jeśli rozkłady czasów Θ_{bl} pracy systemu są równomierne z parametrami x_{bl}, y_{bl}

$$H_{bl}(t) = \frac{t - x_{bl}}{y_{bl} - x_{bl}}, \quad t \in \langle x_{bl}, y_{bl} \rangle,$$

to średnie i odchylenia standardowe czasów $\bar{\Theta}_b^{(\omega)}$ są następujące

$$\bar{M}_b^{(\omega)} = \omega M_b,$$

$$\bar{D}_b^{(\omega)} = \sqrt{\omega} \cdot D_b, \quad \omega = 1, 2, \dots,$$

gdzie

$$M_b = \sum_{l=1}^v p_{bl}M_{bl} = \sum_{l=1}^v p_{bl} \frac{x_{bl} + y_{bl}}{2},$$

$$D_b = \sqrt{\sum_{l=1}^v p_{bl} \frac{x_{bl}^2 + x_{bl}y_{bl} + y_{bl}^2}{3} - \left(\sum_{l=1}^v p_{bl} \frac{x_{bl} + y_{bl}}{2}\right)^2}.$$

dla każdego ustalonego b , $b = 1, 2, \dots, v$.

5.1.2. Niezawodność dowolnego systemu złożonego

Niestety, nie jest możliwe uzyskanie wyników niezawodnościowych dla wielostanowych systemów w przypadku, gdy funkcje niezawodnościowe ich elementów nie są wykładnicze. Wynika stąd, że główny rezultat jest ważny tylko w przypadku założenia wykładniczości funkcji niezawodnościowych elementów systemu.

Konstrukcja ogólnego modelu analitycznego do wyznaczania niezawodności złożonych systemów, łączącego model ich procesów eksploatacyjnych oraz model niezawodnościowy, jest możliwa dla dowolnych rozkładów czasów przebywania procesów eksploatacyjnych w poszczególnych stanach, tj. dla dowolnego modelu procesu eksploatacyjnego zakładając kawałkami wykładnicze funkcje niezawodnościowe elementów systemu w jego poszczególnych stanach eksploatacyjnych, a więc tylko dla jednego konkretnego modelu niezawodnościowego systemu. Fakt ten, w ogólnym przypadku, wiąże się z koniecznością zastosowania metody symulacji Monte Carlo, przy założeniu, że czasy przebywania procesów eksploatacyjnych w poszczególnych stanach mają dowolne rozkłady oraz warunkowe funkcje niezawodności elementów systemów również są dowolne, tj. dla każdego modelu procesu eksploatacyjnego i dla każdego modelu niezawodnościowego systemu.

5.2. Niezawodność nie-wykładniczego systemu złożonego – podejście symulacyjne Monte Carlo

Po ustaleniu początkowego stanu eksploatacyjnego z_b oraz stanu następnego z_l , losowe warunkowe czasy Θ_{bl} , $b, l \in \{1, 2, \dots, v\}$, $b \neq l$, procesu eksploatacji systemu $Z(t)$ generowane są korzystając z dystrybuant $H_{bl}(t)$, $b, l \in \{1, 2, \dots, v\}$, $b \neq l$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$.

W przypadku rozkładu wykładniczego

$$H_{bl}(t) = 1 - \exp[-\alpha_{bl}t],$$

używając metody odwracania dystrybuanty, otrzymujemy

$$\theta_{bl} = -\frac{1}{\alpha_{bl}} \ln[1-h], \quad b, l \in \{1, 2, \dots, v\}, \quad b \neq l.$$

gdzie h jest losowo generowaną liczbą z rozkładu równomiernego na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

W przypadku rozkładu normalnego o parametrach m_{bl} , σ_{bl}

$$H_{bl}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{bl}} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-m_{bl})^2}{2\sigma_{bl}^2}\right] dt,$$

używając metody Boxa-Mullera, otrzymujemy

$$\theta_{bl} = \sin(2\pi h_2) \sqrt{-2 \ln[1-h_1]}, \quad b, l \in \{1, 2, \dots, v\}, \quad b \neq l,$$

gdzie h_1 , h_2 są losowo generowanymi liczbami z rozkładu równomiernego na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

W przypadku rozkładu równomiernego o parametrach x_{bl} , y_{bl}

$$H_{bl}(t) = \frac{t - x_{bl}}{y_{bl} - x_{bl}}, \quad t \in \langle x_{bl}, y_{bl} \rangle,$$

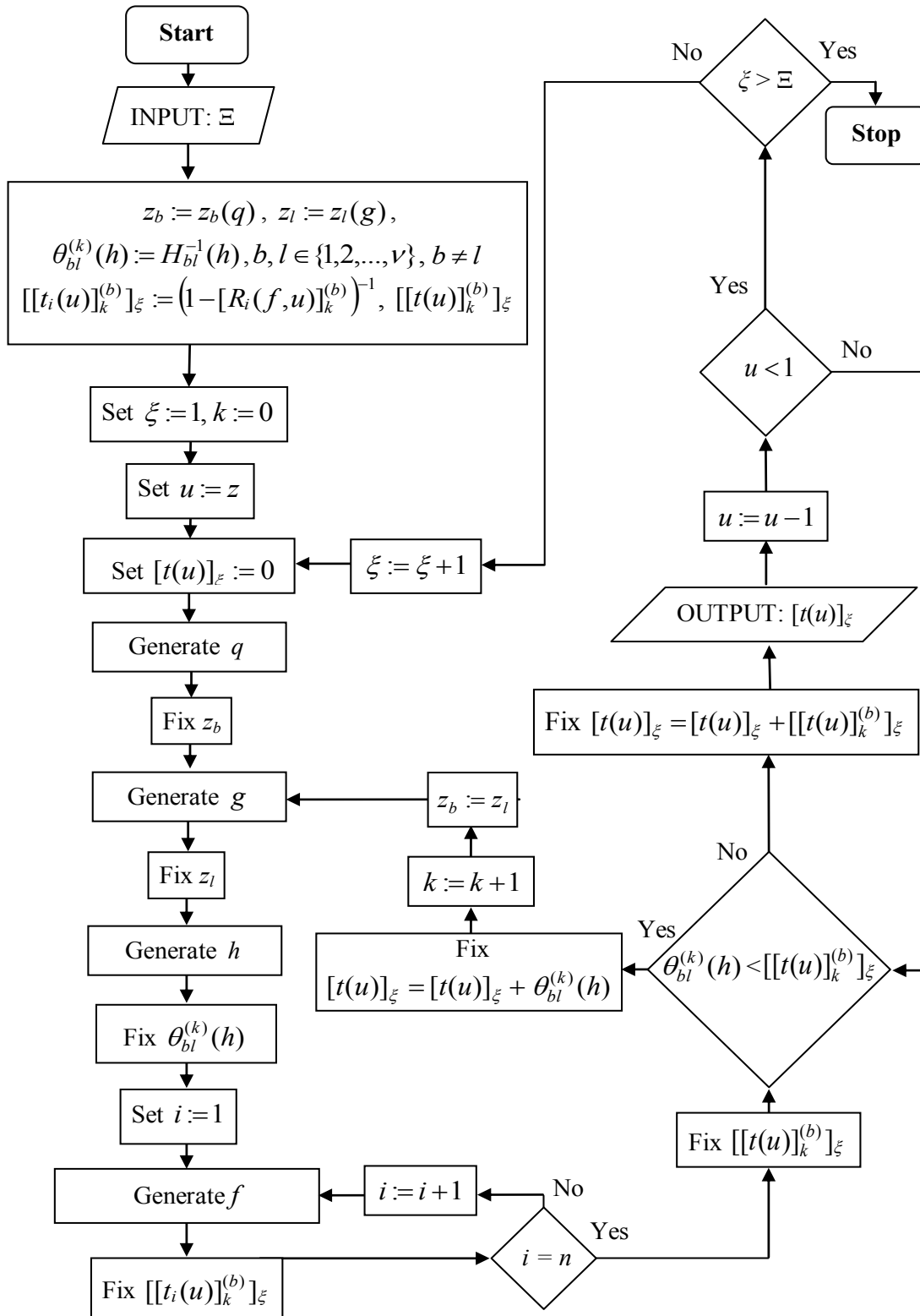
używając metody odwracania dystrybuanty, otrzymujemy

$$\theta_{bl} = h(y_{bl} - x_{bl}) + x_{bl}, \quad b, l \in \{1, 2, \dots, v\}, \quad b \neq l,$$

gdzie h jest losowo generowaną liczbą z rozkładu równomiernego na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

5.2.1. Ogólna procedura symulacji Monte Carlo zastosowana do określania charakterystyk niezawodnościowych dowolnego złożonego systemu

Superpozycja generowania procesu eksploatacji systemu technicznego i generowania jego procesu zmian stanów niezawodnościowych pozwala na skonstruowanie ogólnej łącznej procedury symulacji Monte Carlo dla oceny niezawodności rozpatrywanego złożonego systemu w zmiennych warunkach eksploatacyjnych.



Rys. 11. Ogólny schemat blokowy algorytmu Monte Carlo do oceny niezawodności systemu

5.3. Analiza niezawodności wybranych dwustanowych systemów złożonych o różnych parametrach eksploatacji i niezawodności

Tabela 2. Przykładowe warunkowe dystrybuanty czasów Θ_{bl} .

Przypadek	Nazwa rozkładu	Dystrybuanta	Parametry
O1	Rozkład wykładniczy	$H_{bl}(t) = 1 - \exp[-\alpha_{bl}t]$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$, $b, l = 1, 2$	$\alpha_{12} = 290$, $\alpha_{21} = 71$
O2	Rozkład normalny	$H_{bl}(t) = F_{N(m_{bl}, \sigma_{bl})}(t)$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$, $b, l = 1, 2$	$m_{12} = 290$, $\sigma_{12} = 10$, $m_{21} = 71$, $\sigma_{21} = 5$
O3	Rozkład równomierny	$H_{bl}(t) = \frac{t - x_{bl}}{y_{bl} - x_{bl}}$, $t \in \langle x_{bl}, y_{bl} \rangle$, $b, l = 1, 2$	$x_{12} = 270$, $y_{12} = 305$, $x_{21} = 62$, $y_{12} = 80$
O4	Rozkład równomierny	$H_{bl}(t) = \frac{t - a_{bl}}{b_{bl} - a_{bl}}$, $t \in \langle x_{bl}, y_{bl} \rangle$, $b, l = 1, 2$	$x_{12} = 0$, $y_{12} = 575$, $x_{21} = 0$, $y_{12} = 142$

Tabela 3. Przykładowe warunkowe funkcje niezawodności.

Przypadek	Nazwa rozkładu	Funkcje niezawodności	Parametry
R1	Rozkład wykładniczy	$R_k^{(b)}(t) = \exp[-\lambda_k^{(b)}t]$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$, $b, l = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$	$\lambda_k^{(1)} = 0.00206667 \frac{2k+1}{k+1}$, $\lambda_k^{(2)} = 0.0014400 \frac{2k+1}{k+1}$
R2	Rozkład Weibulla	$R_k^{(b)}(t) = \exp[-\lambda_k^{(b)}t^{\beta_k^{(b)}}]$, $t \in \langle 0, \infty \rangle$, $b, l = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$	$\lambda_k^{(1)} = 0.00000335 \left(\frac{2k+1}{k+1}\right)^2$, $\lambda_k^{(2)} = 0.00000163 \left(\frac{2k+1}{k+1}\right)^2$, $\beta_k^{(1)} = \beta_k^{(2)} = 2$

Tabela 4. Średnie oraz odchylenia standardowe czasów zdatności systemu.

Przypadek	Średnia [dni]	Odchylenie standardowe [dni]
O1 oraz R1	$\bar{T} \approx 350.912$	$\sigma \approx 308.114$
O2 oraz R1	$\bar{T} \approx 355.432$	$\sigma \approx 305.037$
O3 oraz R1	$\bar{T} \approx 355.502$	$\sigma \approx 305.786$
O4 oraz R1	$\bar{T} \approx 353.673$	$\sigma \approx 306.396$
O1 oraz R2	$\bar{T} \approx 541.649$	$\sigma \approx 355.998$
O2 oraz R2	$\bar{T} \approx 569.715$	$\sigma \approx 403.316$
O3 oraz R2	$\bar{T} \approx 568.648$	$\sigma \approx 402.084$
O4 oraz R2	$\bar{T} \approx 532.467$	$\sigma \approx 349.989$

6. Podsumowanie

W pracy przedstawione zostały metoda analityczna oraz oparta na niej metoda symulacji Monte Carlo służące do oceny niezawodności starzejących się systemów złożonych. Następnie metoda analityczna została uogólniona na starzejące się złożone systemy, których elementy nie muszą charakteryzować się brakiem pamięci. Na podstawie tej metody zbudowane zostały ogólna procedura i schemat blokowy służące do oceny niezawodności takich systemów metodą Monte Carlo.

Ponadto zbudowany został najbardziej ogólny algorytm pozwalający oceniać niezawodność starzejących się systemów złożonych, których procesy eksploatacyjne opisane są dowolnymi rozkładami czasów przebywania w stanach eksploatacyjnych, natomiast dowolne funkcje niezawodności ich elementów są zmodyfikowane w ten sposób, że elementy te nie charakteryzują się „brakiem pamięci”. Zastosowanie tego algorytmu zostało zilustrowane wynikami dla wybranych złożonych systemów dwustanowych. Wszystkie obliczenia przeprowadzone w pracy wykonane zostały za pomocą własnych programów komputerowych opartych o zaproponowane procedury i algorytmy.

Dalsze rozszerzenie możliwości zastosowań uzyskanych wyników można przeprowadzić poprzez poszerzenie klasy rozkładów warunkowych czasów przebywania procesu eksploatacji w stanach eksploatacyjnych oraz rodzajów funkcji niezawodności elementów systemów, ale także poprzez wprowadzenie w funkcjach niezawodności elementów innych procedur uwzględniających "pamięć".

7. Literatura

Abouammoh A., Al-Kadi M. (1991) Component relevancy in multi-state reliability models. *IEEE Transactions on Reliability*. 40, 370-375.

Amari S. V., Misra R. B. (1997) Comment on: Dynamic reliability analysis of coherent multi-state systems. *IEEE Transactions on Reliability*. 46, 460-461.

Au S. K., Beck J. L. (2003) Subset Simulation and its Application to Seismic Risk Based on Dynamic Analysis. *Journal of Engineering Mechanics* 129, 901-917.

Aven T, Jensen U. (1999) *Stochastic Models in Reliability*. Springer-Verlag, New York.

Aven T. (1985) Reliability evaluation of multi-state systems with multi-state components. *IEEE Transactions on Reliability* 34, 473-479.

Aven T. (1993) On performance measures for multi-state monotone systems. *Reliability Engineering and System Safety* 41, 259-266.

Barlow R. E., Proschan F. (1975) *Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Probability Models*. Holt Rinehart and Winston, Inc., New York.

Barlow R. E., Wu A. S. (1978) Coherent systems with multi-state components. *Mathematics of Operations Research* 4, 275-281.

Block H. W., Savitis T. H. (1982) A decomposition for multi-state monotone systems. *Journal of Applied Probability* 19, 391-402.

- Blokus-Roszkowska A., Kołowrocki K., Xiuju F. (2011) Integrated software tools supporting decision making on operation, identification, prediction and optimization of complex technical systems reliability and safety. Parts 1-3. *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety & Reliability Seminars 2* (2), 267-296.
- Blokus-Roszkowska A., Kołowrocki K., Kuligowska E., Soszyńska-Budny J. (2016) Critical Infrastructure Safety Model (CISM), Multistate Ageing Approach Independent and Dependent Components and Subsystems, CISM Model 0. *EU-CIRCLE Report D3.3-GMU0*, Grant agreement No 653824.
- Blokus-Roszkowska A., Kołowrocki K., Salahuddin Habibullah M. (2011) Integrated package of tools supporting decision making on operation, identification, prediction and optimization of complex technical systems reliability and safety. Parts 4-6. *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety & Reliability Seminars 2* (2), 297-336.
- Bobrowski D. (1985) *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Boedigheimer R., Kapur K. (1994) Customer-driven reliability models for multi-state coherent systems. *IEEE Transactions on Reliability* 43, 45-50.
- Box G. E. P., Muller M. E. (1958) A note on the generation of random normal deviates. *Annals of Mathematical Statistics* 29, 610-611.
- Brausch A. (1987) Calculation of critical importance for multi-state components. *IEEE Transactions on Reliability* 36, 247-249.
- Brunelle R. D., Kapur K.C. (1999) Review and classification of reliability measures for multistate and continuum models. *IEEE Transactions* 31, 1117-1180
- Butler D. (1979) A complete importance ranking for components of binary coherent systems with extension to multi-state systems. *Naval Research Logistics* 26, 556-578.
- Butler D. (1982) Bounding the reliability of multi-state systems. *Operations Research* 30, 530-544.
- Cardalora L. (1980) Coherent systems with multi-state components. *Nuclear Engineering and Design* 58, 127-139.
- Černý V. (1985) Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: an efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications* 45, 41-51.
- Dąbrowska E., Soszyńska-Budny J. (2018) Monte Carlo Simulation Forecasting of Maritime Ferry Safety and Resilience. *Proc. IEEM Conference (in press)*.
- Ebrahimi N. (1984) Multistate reliability models. *Naval Res. Logistics* 31, 671-680.
- El-Newehi E., Proschan F., Setchuraman J. (1978) Multi-state coherent systems. *Journal of Applied Probability* 15, 675-688.
- Fardis M. N., Cornell C. A. (1981) Analysis of coherent multistate systems. *IEEE Transactions on Reliability* 30, 117-122.

- Grabski F. (2002) *Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji*. Monografia, Polska Akademia Nauk, IBS, Seria: Badania Systemowe, Tom 30, Warszawa.
- Grabski, F., Jaźwiński, J. (2009) *Funkcje o losowych argumentach w zagadnieniach niezawodności, bezpieczeństwa i logistyki*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa.
- Grabski, F. (2014) *Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance*. Elsevier.
- Griffith W. S. (1980) Multi-state reliability models. *Journal of Applied Probability* 17, 735-744
- Guze S., Kołowrocki K., Soszyńska J. (2008) Modeling environment and infrastructure influence on reliability and operation processes of port transportation systems. *Proc. Summer Safety & Reliability Seminars* 24 (1), 179-188.
- Habibullah M. S., Lumanpauw E., Kolowrocki K., Soszynska J., Ming N. G. (2009) A computational tool for general model of industrial systems. operation processes. *Electronic Journal Reliability & Risk Analysis: Theory & Applications* 2 (4), 181-191.
- Hryniewicz O. (1995) Lifetime tests for imprecise data and fuzzy reliability requirements. *Reliability and Safety Analyses under Fuzziness*. Onisawa T. and Kacprzyk J., Eds., Physica Verlag, Heidelberg, 1995, 169-182.
- Huang J., Zuo M. J., Wu Y. (2000) Generalized multi-state k-out-of-n:G systems. *IEEE Transactions on Reliability* 49, 105-111.
- Hudson J. C., Kapur K. (1985) Reliability bounds for multistate systems with multistate components. *Operations Research* 33, 735-744.
- Hudson J. C., Kapur K. C. (1982) Reliability theory for multistate systems with multistate components. *Microelectronics and Reliability* 22, 1-7.
- Hudson J. C., Kapur K. C. (1983a) Modules in coherent multistate systems. *IEEE Transactions on Reliability* 32, 183-185.
- Hudson J. C., Kapur K. C. (1983b) Reliability analysis of multistate systems with multistate components. *Transactions of Institute of Industrial Engineers* 15, 127-135.
- Jaźwiński J., Fiok-Ważyńska K. (1990) *Niezawodność systemów technicznych*. PWN, Warszawa.
- Karpiński J., Korczak E. (1990) *Metody oceny niezawodności dwustanowych systemów technicznych*. Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa.
- Klabjan D., Adelman D. (2006) Existence of optimal policies for semi-Markov decision processes using duality for infinite linear programming. *Siam Journal on Control and Optimization* 44 (6), 2104-2122.
- Kołowrocki K. (2004) *Reliability of Large Systems*. Elsevier.

- Kołowrocki K. (2006) Reliability and risk evaluation of complex systems in their operation processes. *International Journal of Materials & Structural Reliability* 4 (2), 129-147.
- Kołowrocki K. (2007a) Reliability modeling of complex systems - Part 1. *Electronic Journal Reliability: Theory & Applications* 2 (3-4), 116-127.
- Kołowrocki K. (2007b) Reliability modeling of complex systems - Part 2. *Electronic Journal Reliability: Theory & Applications* 2 (3-4), 128-139.
- Kołowrocki K. (2008) Reliability and risk analysis of multi-state systems with degrading components. *Proc. Summer Safety & Reliability Seminars* 2 (2), 205-216.
- Kołowrocki K. (2013) Safety of critical infrastructures, *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety and Reliability Seminars* 4 (1), 51-72.
- Kołowrocki K. (2014) *Reliability of large and complex systems*, Elsevier.
- Kołowrocki K., Kuligowska E. (2013) Monte Carlo simulation application to reliability evaluation of port grain transportation system operating at variable conditions, *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety and Reliability Seminars* 4 (1), 73-82.
- Kołowrocki K., Kuligowska E., Soszyńska-Budny J. (2012) Monte Carlo simulation for optimization of object operation process and reliability, *Journal of KONBiN*, 24 (4), 79-92.
- Kołowrocki K., Kuligowska E., Soszyńska-Budny J. (2014) On multistate technical system operation process influence on its reliability, *Proc. European Safety and Reliability Conference – ESREL 2014, Wrocław, 2014, Safety and Reliability: Methodology and Applications*, Taylor & Francis Group, London, 2015, 2099-2106.
- Kołowrocki K., Kuligowska E., Soszyńska-Budny J. (2015a) Monte Carlo simulation application to reliability assessment of an exemplary system operating at variable conditions, *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety and Reliability Seminars*, 6 (1), 137-144.
- Kołowrocki K., Kuligowska E., Soszyńska-Budny J. (2015b) Reliability assessment of an exemplary system operating at variable conditions, *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety and Reliability Seminars*, 6 (1), 129-136.
- Kołowrocki K., Kuligowska E., Soszyńska-Budny J. (2015c) Reliability of complex system under operation process influence – Monte Carlo simulation approach, *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety and Reliability Seminars*, 6 (1), 145-153.
- Kołowrocki K., Kuligowska E., Soszyńska-Budny J. (2015d) Reliability of maritime ferry technical system, Monte Carlo simulation assessment, *Proc. European Safety and Reliability Conference – ESREL 2015, Zurich, Switzerland, 2015, Safety and Reliability of Complex Engineered Systems*, Taylor & Francis Group, London, 2015, 1607-1612.
- Kołowrocki K., Soszyńska J. (2006) Reliability and availability of complex systems. *Quality and Reliability Engineering International* 22, Issue 1, J. Wiley & Sons Ltd., 79-99.

- Kołowrocki K., Soszyńska J. (2008) A general model of industrial systems operation processes related to their environment and infrastructure. *Proc. Summer Safety & Reliability Seminars* 2 (2), 223-226.
- Kołowrocki K., Soszyńska J. (2009a) Methods and algorithms for evaluating unknown parameters of components reliability of complex technical systems. *Proc. Summer Safety & Reliability Seminars* 4 (2), 223-230.
- Kołowrocki K., Soszyńska J. (2009b) Modeling environment and infrastructure influence on reliability and operation process of port oil transportation system. *Electronic Journal Reliability: Theory & Applications* 2 (3), 131-142.
- Kołowrocki K., Soszyńska J. (2009c) Reliability, risk and availability based optimization of complex technical systems operation processes. Part 1. Theoretical backgrounds. *Electronic Journal Reliability: Theory & Applications* 2 (4), 141-152.
- Kołowrocki K., Soszyńska J. (2009d) Reliability, risk and availability based optimization of complex technical systems operation processes. Part 2. Application in Port Transportation. *Electronic Journal Reliability: Theory & Applications* 2 (4), 153-167.
- Kołowrocki K., Soszyńska J. (2010) Reliability, availability and safety of complex technical systems: modeling - identification - prediction - optimization. *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety & Reliability Seminars* 1 (1), 133-158.
- Kołowrocki K., Soszyńska J., Torbicki M. (2017a) Integrated impact model on critical infrastructure safety related to its operation process and climate-weather change process. *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety & Reliability Seminars* 8 (4), 33-48.
- Kołowrocki K., Soszyńska J., Torbicki M. (2017b) Model of system safety related to climate-weather change process. *Journal of KONBiN* 43, 241-248.
- Kołowrocki K., Soszyńska J., Xie M., Kien M., Salahudin M. (2008) Safety and reliability of complex industrial systems and process. *Proc. Summer Safety & Reliability Seminars*, 4 (2), 227-234.
- Kołowrocki K., Soszyńska-Budny J. (2011) *Reliability and Safety of Complex Technical Systems and Processes: Modeling-Identification-Prediction-Optimization*. Springer.
- Kołowrocki K., Soszyńska-Budny J. (2015) *Reliability and Safety of Complex Technical Systems and Processes*, Springer.
- Kołowrocki K., Soszyńska-Budny J., Ng Kien Ming. (2011) Integrated package of tools supporting decision making on operation, identification, prediction and optimization of complex technical systems reliability and safety. Parts 1-3. *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety & Reliability Seminars* 2 (2), 361-398.
- Kołowrocki K., Soszyńska-Budny J., Xie M. (2011) Integrated package of tools supporting decision making on operation, identification, prediction and optimization of complex technical systems reliability and safety. Parts 4-7, *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety & Reliability Seminars* 2 (2), 399-451.

- Kopociński B. (1973) *Zarys teorii odnowy i niezawodności*. Polskie Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Kroese D. P., Taimre T., Botev Z. I. (2011) *Handbook of Monte Carlo Methods*. John Wiley & Sons, Inc.
- Kuligowska E. (2012a) Monte Carlo simulation for reliability assessment of a technical object subjected to varying operation conditions. *Scientific Problems of Machines Operation and Maintenance* 47 (1), 63-74.
- Kuligowska E. (2012b) Preliminary Monte Carlo approach to complex technical system reliability analysis. *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety and Reliability Seminars* 3 (1), 59-71.
- Kuligowska E. (2013a) Monte Carlo simulation for reliability assessment and optimization of an object subjected to varying operation conditions. *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety and Reliability Seminars* 4 (2), 205-218.
- Kuligowska E. (2013b) Reliability analysis of a system subjected to two-state operation process. *Scientific Journals Maritime University of Szczecin* 1 (36), 100-104.
- Kuligowska E. (2013c) Symulacja Monte Carlo w ocenie niezawodności obiektu technicznego w zmiennych warunkach eksploatacyjnych. *Materiały Zimowej Szkoły Niezawodności, Niezawodność Infrastruktur Krytycznych*, Szczyrk, 2013, 69-70.
- Kuligowska E. (2014) Analysis of system operation process influence on its reliability. *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety and Reliability Seminars* 4 (1), 125-135.
- Kuligowska E. (2017a) Monte Carlo Simulation of Complex System Reliability Evaluation. Chapter in Monograph: *Current research in mathematical and computer sciences*. Red. A. Lecko, Wydawnictwo UWM, Olsztyn, 139-152.
- Kuligowska E. (2017b) Operating Environment Threats Influence on the Maritime Ferry Technical System Safety – the Numerical Approach, *Journal of KONBiN* 42, 63-74.
- Kuligowska E. (2018) Monte Carlo simulation of climate-weather change process at maritime ferry operating area, *Technical Sciences, University of Warmia and Mazury in Olsztyn* 1 (21), 5-17.
- Kuligowska E., Torbicki M. (2018) GMU Safety Interactive Platform Organization and Possibility of its Applications, *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety and Reliability Seminars* 9 (2), 99-114.
- Law A. M., Kelton W. D. (2000) *Simulation Modeling and Analysis*, 3rd ed., McGraw Hill.
- Limnios N., Oprisan G. (2001) *Semi-Markov Processes and Reliability*. Birkhauser, Boston.
- Marsaglia G., Tsang W. W. (2000) The Ziggurat Method for Generating Random Variables, *Journal of Statistical Software*, 5 (8), 1-7.

- Meng F. (1993) Component-relevancy and characterisation in multi-state systems. *IEEE Transactions on Reliability* 42, 478-483.
- Mercier S. (2008) Numerical bounds for semi-Markovian quantities and application to reliability. *Methodology and Computing in Applied Probability* 10 (2), 179-198.
- Metropolis N., Ulam S. (1949) The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, 44 (247), 335-341.
- Natvig B. (1982) Two suggestions of how to define a multi-state coherent system. *Advances in Applied Probability* 14, 434-455.
- Natvig B. (1984) Multi-state coherent systems. *Encyclopaedia of Statistical Sciences*, Wiley and Sons, New York.
- Natvig B., Streller A. (1984) The steady-state behaviour of multi-state monotone systems. *Journal of Applied Probability* 21, 826-835.
- Ohio F., Nishida T. (1984) On multi-state coherent systems. *IEEE Transactions on Reliability* 33, 284-287.
- Pourret O., Collet J., Bon J-L. (1999) Evaluation of the unavailability of a multistate-component system using a binary model. *IEEE Transactions on Reliability* 64, 13-17.
- Rao M. S., Naikan V. N. A. (2016) Review of simulation approaches in reliability and availability modeling, *International Journal of Performability Engineering*, 12 (4), 369-388.
- Rao M. S., Naikan V. N. A. (2009) A Novel Markov System Dynamics Framework for Reliability Analysis of Systems, *Economic Quality Control*, 24 (1), 101-116.
- Rényi A. (1970) *Probability Theory*, North-Holland Publishing Company and Akadémiai Kiadó, Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences.
- Ross S. (1979) Multi-valued state component systems. *Annals of Probability* 7, 379-383.
- Soszyńska J. (2006) Analiza bezpieczeństwa systemów wielostanowych w zmiennych warunkach eksploatacji, *Diagnostyka* 2006, 3 (39), 25-34.
- Soszyńska J. (2007a) Systems reliability analysis in variable operation conditions. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 14 (6), 617-634.
- Soszyńska J. (2007b) *Analiza niezawodności systemów w zmiennych warunkach eksploatacji*. Rozprawa doktorska, Polska Akademia Nauk, Instytut badań systemowych, Warszawa.
- Soszyńska J. (2007c) Systems reliability analysis in variable operation conditions. *Electronic Journal Reliability: Theory and Applications* 2 (3-4), 186-197.
- Soszyńska J. (2010) Reliability and risk evaluation of a port oil pipeline transportation system in variable operation conditions. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 87 (2-3), 81-87.

- Soszyńska J., Kołowrocki K., Blokus-Roszkowska A., Guze S. (2010) Prediction of complex technical systems operation processes. *Journal of Polish Safety and Reliability Association, Summer Safety & Reliability Seminars* 1 (2), 379-510.
- Soszyńska-Budny J. (2012) Reliability, risk and availability analysis of a container gantry crane. *Electronic Journal Reliability: Theory and Applications* 1 (1), 126-141.
- Sun Z.L., Ming Ng K., Soszyńska-Budny J., M.S. Habibullah M. S. (2011) Application of the LP-ELM model on transportation system lifetime optimization. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 12 (4), 1484-1494.
- Tang H., Yin B. Q., Xi H. S. (2007) Error bounds of optimization algorithms for semi-Markov decision processes. *International Journal of Systems Science* 38 (9), 725-736.
- Vogel C. R. (2002) *Computational Methods for Inverse Problems*, SIAM.
- Xue J. (1985) On multi-state system analysis. *IEEE Transactions on Reliability* 34, 329-337.
- Xue J., Yang K. (1995a) Dynamic reliability analysis of coherent multi-state systems. *IEEE Transactions on Reliability* 4 (44), 683-688.
- Xue J., Yang K. (1995b) Symmetric relations in multi-state systems. *IEEE Transactions on Reliability* 4 (44), 689-693.
- Yu K., Koren I., Guo Y. (1994) Generalised multistate monotone coherent systems. *IEEE Transactions on Reliability* 43, 242-250.
- Zio E., Marseguerra M. (2002) *Basics of the Monte Carlo Method with Application to System Reliability*, LiLoLe.