

dr Urszula Bentkowska (Dudziak)
Interdyscyplinarne Centrum
Modelowania Komputerowego
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Uniwersytet Rzeszowski
ul. Pigonia 1, 35-310 Rzeszów

Rzeszów, 28 stycznia 2019
(Załącznik 3a)

AUTOREFERAT

przedstawiający opis podstawowego osiągnięcia i pozostałego dorobku naukowego
w związku z ubieganiem się o nadanie stopnia doktora habilitowanego

1 Imię i nazwisko

Urszula Bentkowska

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

19.01.2006 Doktorat, dyscyplina: **matematyka**

Wydział Matematyki Stosowanej

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Tytuł rozprawy: Przekształcenia relacji rozmytych

24.06.1999 Magisterium, dyscyplina **matematyka**

specjalność: nauczanie matematyki

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy

Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Rzeszowie

(od 1.09.2001 Uniwersytet Rzeszowski)

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

od **1.12.2018** *adiunkt w grupie badawczo-dydaktycznej*

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy

Interdyscyplinarne Centrum Modelowania Komputerowego

Uniwersytet Rzeszowski

1.08.2017-30.11.2018 *starszy wykładowca*

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy

Interdyscyplinarne Centrum Modelowania Komputerowego

Uniwersytet Rzeszowski

1.04.2006-31.07.2017 *adiunkt*

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Instytut Matematyki (od 1.04.2015
Interdyscyplinarne Centrum Modelowania Komputerowego)
Uniwersytet Rzeszowski

1.10.1999 - 31.03.2006 *asystent*

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Instytut Matematyki
Uniwersytet Rzeszowski

4 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dn. 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz.U. 2003 nr 65 poz. 595 z późn. zm.)

4.1 Jako osiągnięcie naukowe uzyskane po otrzymaniu stopnia doktora wskazuję

monografię w języku angielskim

Urszula Bentkowska, **Interval-Valued Methods in Classifications and Decisions**, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, vol. 378, Springer 2019, DOI: 10.1007/978-3-030-12927-9.

4.2 Omówienie celu naukowego wyżej wymienionej pracy i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

4.2.1 Cel badań naukowych

W swoich badaniach naukowych w ostatnich latach zajmowałam się zagadnieniami z zakresu metod sztucznej inteligencji w kontekście zastosowań przedziałowych zbiorów rozmytych (por. [57]), które stanowią jedno z ważniejszych i prężnie rozwijających się uogólnień teorii zbiorów rozmytych [55]. Uzyskane przeze mnie wyniki mogą być także użyteczne w szerszym obszarze, mianowicie dla potrzeb modelowania matematycznego w zakresie ogólnie pojętego rachunku przedziałowego. Teoria zbiorów rozmytych i ich rozszerzeń jest jednym z ważniejszych narzędzi stosowanych do rozwiązywania problemów wynikających z występowania danych niepewnych, czyli niepełnych bądź też nieprecyzyjnych. Można wyróżnić wiele różnych przyczyn niepewności występujących w danych. Niektóre pochodzą ze sprzecznych lub niekompletnych informacji, jak również z różnorodnej interpretacji jakiegoś zjawiska. Inne wynikają z braku dobrze określonych sposobów rozróżnienia obiektów lub

nieprecyzyjnie określonych granic. Ponieważ nie jest możliwe całkowite wyeliminowanie niepewności z codziennego doświadczenia naukowców, specjalistów z różnych dziedzin, a także z życia przeciętnego człowieka, istnieje potrzeba opracowania skutecznych algorytmów oraz systemów wspomagania decyzji, które byłyby w stanie sprostać powstającym problemom takim jak efektywna analiza niepełnych, nieprecyzyjnych danych.

Głównym celem moich badań było zastosowanie modelowania matematycznego w procesach podejmowania decyzji do poprawy jakości działania klasyfikatorów. W szczególności, zajęłam się opracowaniem metod polepszających wyniki klasyfikacji i procesów decyzyjnych w warunkach danych niekompletnych oraz mających bardzo dużo atrybutów (dane mikromacierzowe). Badania dotyczyły zarówno zagadnień teoretycznych jak i praktycznych. Kluczową częścią osiągnięcia naukowego podlegającego ocenie jest z jednej strony szczegółowa analiza nowych klas agregacji, które wprowadziłam w pracy [11], a z drugiej strony są to nowatorskie algorytmy klasyfikacyjne oparte na metodach modelowania matematycznego w rachunku przedziałowym. Opisane algorytmy mogą być wykorzystane w komputerowych systemach wspomagania decyzji, na przykład dla potrzeb medycyny, gdzie dane niekompletne bądź też nieprecyzyjne pojawiają się bardzo często, bądź też w problemach przetwarzania dużych danych.

Przedstawione wyniki związane są z epistemicznym znaczeniem przedziału, który może reprezentować niepewność (dlatego nazywany jest *przedziałem niepewności*). Zatem w kontekście danych niekompletnych bądź też nieprecyzyjnych przedział rozumiany jest jako zbiór wartości, z których dokładnie jedna jest tą właściwą wartością [29]. W rachunku przedziałowym pojawiają się nowe wyzwania, które nie występują w przypadku operowania na zwykłych wartościach liczbowych. Jednym z takich wyzwań są efektywne metody porównywania i porządkowania przedziałów. W swoich rozważaniach skoncentrowałam się na dwóch relacjach porównywania przedziałów, a w konsekwencji zajęłam się też analizą pojęć, które wykorzystują w swoich definicjach te relacje porównywalności. Jednym z takich pojęć są agregacje. Teoria agregacji od co najmniej 30 lat stanowi ugruntowaną dziedzinę badań. Skutkiem tego jest wydanie kilku monografii dotyczących tego ważnego pojęcia jakim są agregacje. Powodem takiego stanu rzeczy jest fakt, że agregacje mają liczne zastosowania, na przykład w problemach decyzyjnych, sztucznej inteligencji, systemach rozmytych czy też w zagadnieniach dotyczących przetwarzania obrazów (por. [1]).

4.2.2 Osiągnięte wyniki wraz z omówieniem ich ewentualnego zastosowania

W wyniku moich badań wprowadziłam pojęcie *agregacji możliwości*, w skrócie *pos-agregacji* (ang. possible aggregation) oraz *agregacji konieczności*, w skrócie *nec-agregacji* (ang. necessary aggregation). Dodatkowo szczegółowo zbadałam własności tych nowych klas agregacji, podałam liczne przykłady i metody konstrukcji oraz zba-

dałam zależności nowych klas agregacji ze znanymi wcześniej operatorami agregacji. Ponadto, wskazałam zastosowania nowo wprowadzonych pojęć w zagadnieniach wielokryterialnego podejmowania decyzji oraz w komputerowym systemie wspomagania decyzji OvaExpert (por. [33, 38]). Zająłam się też problemem optymalizacji działania algorytmu k najbliższych sąsiadów k - NN dla potrzeb klasyfikacji danych mających dużo brakujących wartości atrybutów warunkowych, gdzie zazwyczaj spada jakość klasyfikacji. Pokazałam, że zastosowanie modelowania matematycznego za pomocą przedziałów, w tym agregacji przedziałowych, pozwala niejako na odzyskanie brakującej informacji i poprawę jakości klasyfikacji. Tego typu algorytmy mogą być wykorzystane w szczególności w komputerowych systemach wspomagania decyzji dla potrzeb medycyny, gdzie brakujące dane mogą pojawiać się z powodów finansowych (kosztowne badania, brak specjalistycznego sprzętu medycznego) bądź też z powodu niemożności wykonania danego badania u pacjenta, co wynika ze stanu jego zdrowia.

Ponadto zająłam się też problematyką optymalizacji działania algorytmu k - NN dla danych mikromacierzowych, na przykład do identyfikacji markerów nowotworowych, które charakteryzują się dużą ilością atrybutów warunkowych w tablicach decyzyjnych. Zaprezentowane rezultaty pokazują wyższość modelowania matematycznego za pomocą przedziałów i agregacji przedziałowych, które pozwalają uzyskać lepsze wyniki klasyfikacji niż metody agregacji z użyciem średniej arytmetycznej. Analogiczne metody mogą być zastosowane także w problemach klasyfikacji, gdzie występuje duża liczba obiektów w tablicach decyzyjnych. Przedstawione algorytmy klasyfikacyjne wraz z dodatkowymi materiałami oraz możliwością pobrania plików i uruchomienia algorytmów są dostępne w Internecie [24].

Poniżej zostaną omówione wyniki, które uzyskałam i opisałam w pracy będącej osiągnięciem podlegającym ocenie. Wskażę najważniejsze aspekty badań wraz z uzyskanymi rezultatami.

4.2.2.1 Przegląd relacji porównywania danych przedziałowych. W rozdziale pierwszym wyżej wymienionego osiągnięcia zaprezentowałam różnego rodzaju relacje porównywania przedziałów, w tym relacje porządku oraz relacje porządku liniowego. Część z tych relacji została zaproponowana dla rozmytego rachunku przedziałowego, ale są też takie relacje, które zostały wprowadzone w związku z innymi zagadnieniami optymalizacyjnymi wykorzystującymi porównywanie przedziałów. Moore [44] jako pierwszy szczegółowo opracował rachunek przedziałowy dla umożliwienia kontroli błędów w obliczeniach numerycznych dla potrzeb rozwiązywania problemów dotyczących liczb rzeczywistych.

Relacje porównywania przedziałów mogą być też rozpatrywane w kontekście epistemicznym lub ontycznym [29]. Z epistemicznego punktu widzenia przedział reprezentuje sytuację, w której mamy do czynienia z częściową, niekompletną informa-

cją. Zatem przedział może być traktowany jako zbiór możliwych wartości, z których dokładnie jedna jest tą właściwą opisującą daną rzeczywistość. Z drugiej strony, z ontycznego punktu widzenia, przedział może reprezentować jakąś rzeczywistość, która jest precyzyjna i kompletna, ale jest opisana poprzez zbiór elementów tworzących przedział. W rozmytym rachunku przedziałowym najczęściej używaną relacją porównywania przedziałów, jak do tej pory, jest relacja porządku częściowego (nie będąca porządkiem liniowym) określona następująco

$$[\underline{x}, \bar{x}] \preceq [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \underline{x} \leq \underline{y}, \bar{x} \leq \bar{y}, \quad (1)$$

gdzie

$$L^I = \{[\underline{x}, \bar{x}] : \underline{x}, \bar{x} \in [0, 1], \underline{x} \leq \bar{x}\}$$

oraz elementy $\mathbf{0} = [0, 0]$, $\mathbf{1} = [1, 1]$ są odpowiednio najmniejszym i największym elementem w zbiorze L^I .

W przeprowadzonych badaniach nad porównywaniem przedziałów skupiłam się na matematycznej interpretacji relacji, którą jest porównanie dwóch przedziałów (por. [48]). Mianowicie, przedział $\mathbf{x} \in L^I$ można uznać za poprzedzający przedział $\mathbf{y} \in L^I$, gdy co najmniej jeden element z przedziału \mathbf{x} jest mniejszy bądź równy od co najmniej jednego elementu przedziału \mathbf{y} (zatem jest tu słaba zależność - istnieje możliwość, ang. *possibility*). Ponadto, przedział \mathbf{x} można uznać za poprzedzający przedział \mathbf{y} , gdy każdy element z przedziału \mathbf{x} jest mniejszy bądź równy od każdego elementu przedziału \mathbf{y} (zatem jest tu mocna zależność - swego rodzaju konieczność, ang. *necessity*). Wobec tego, opisując podane warunki za pomocą końców przedziałów, uzyskujemy odpowiednio następujące relacje porównywania przedziałów

$$[\underline{x}, \bar{x}] \preceq_{\pi} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \underline{x} \leq \bar{y}, \quad (2)$$

$$[\underline{x}, \bar{x}] \preceq_{\nu} [\underline{y}, \bar{y}] \Leftrightarrow \bar{x} \leq \underline{y}. \quad (3)$$

Interesujący jest fakt, że tradycyjnie stosowana w rozmytym rachunku przedziałowym, relacja \preceq , spełnia koniunkcję warunków: istnieje element w przedziale \mathbf{x} , który jest mniejszy bądź równy od każdego elementu w przedziale \mathbf{y} oraz każdy element w przedziale \mathbf{x} jest mniejszy bądź równy od pewnego elementu w przedziale \mathbf{y} . Zatem wspomniane trzy relacje, \preceq , \preceq_{π} oraz \preceq_{ν} , biorąc pod uwagę możliwe kombinacje kwantyfikatorów, stanowią pewną logiczną całość. Ponadto, dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^I$ spełniona jest zależność

$$\mathbf{x} \preceq_{\nu} \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \preceq_{\pi} \mathbf{y}. \quad (4)$$

Wspomniane trzy relacje porównywalności \preceq , \preceq_{π} oraz \preceq_{ν} stanowią zatem zestaw relacji, które mogą być stosowane przy epistemicznej interpretacji przedziałów (reprezentujących dane nieprecyzyjne, niekompletne). Natomiast relacja \preceq_{ν} może być także stosowana w kontekście ontycznej interpretacji przedziałów.

Relacje \preceq_π oraz \preceq_ν nie są porządkami częściowymi. Relacja \preceq_π jest porządkiem przedziałowym (jest spójna i spełnia własność Ferrersa) a relacja \preceq_ν jest antysymetryczna i przechodnia. Spójność relacji \preceq_π jest jej atutem, jednak w praktyce pojawia się czasem konieczność zastosowania dodatkowych metod pozwalających na uszeregowanie przedziałów, gdyż w przypadku relacji \preceq_π możemy mieć "nadmiar" informacji. Na przykład, $[0.3, 0.6] \preceq_\pi [0.4, 0.8]$ oraz $[0.4, 0.8] \preceq_\pi [0.3, 0.6]$. W takiej sytuacji można dodatkowo porządkować przedziały biorąc pod uwagę ich szerokość, bądź też wartości końców przedziałów. Takie metody zostały zastosowane w rozdziale trzecim oraz w rozdziale szóstym monografii podlegającej ocenie.

Możliwość porządkowania przedziałów jest bardzo istotną kwestią, zwłaszcza jeśli chodzi o zastosowania praktyczne (na przykład taka sytuacja pojawia się w problemach wielokryterialnego podejmowania decyzji, gdzie zachodzi konieczność porównania alternatyw i wyboru najlepszej z nich) dlatego w pracy [17] zostało wprowadzone pojęcie tzw. *dopuszczalnego porządku liniowego* (ang. *admissible linear order*), mianowicie porządek \preceq_{L^I} jest porządkiem dopuszczalnym, gdy jest to porządek liniowy i dla dowolnych $x, y \in L^I$, jeśli $x \preceq y$, to $x \preceq_{L^I} y$. Została też podana metoda konstrukcji takich porządków liniowych. Metoda ta, jako szczególne przypadki obejmuje znane wcześniej przykłady porządków liniowych dla rachunku przedziałowego, mianowicie są to przykładowo porządek leksykograficzny względem początku przedziału, oznaczany \preceq_{Lex1} , gdzie $[\underline{x}, \bar{x}] \preceq_{Lex1} [\underline{y}, \bar{y}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{x} < \underline{y}$ lub ($\underline{x} = \underline{y}$ i $\bar{x} \leq \bar{y}$), bądź też porządek leksykograficzny względem końca przedziału, oznaczany \preceq_{Lex2} , gdzie $[\underline{x}, \bar{x}] \preceq_{Lex2} [\underline{y}, \bar{y}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{x} < \bar{y}$ lub ($\bar{x} = \bar{y}$ i $\underline{x} \leq \underline{y}$). Jednakże stosowanie porządków liniowych nie rozwiązuje wszystkich problemów praktycznych dotyczących porządkowania przedziałów. Na przykład, w problemach decyzyjnych zastosowanie różnych porządków liniowych może dawać różne uporządkowanie alternatyw. W związku z tym brak jest jednoznaczności rozwiązań. Konieczne jest zatem zastosowanie dodatkowych narzędzi w algorytmach porządkowania, bądź też konieczne jest uwzględnienie interpretacji rozważanych problemów. Na przykład, w problemach wielokryterialnego podejmowania decyzji jeśli eksperci są optymistyczni w swoich decyzjach, intuicyjne będzie zastosowanie porządku \preceq_{Lex2} w celu wyboru najlepszej alternatywy. Przeciwnie, jeśli eksperci są nastawieni pesymistycznie, to zastosowanie porządku \preceq_{Lex1} do wyboru najlepszej alternatywy może być bardziej stosownym rozwiązaniem. Jednak nie zawsze dysponujemy potrzebnymi informacjami, w tym przypadku dotyczącymi podejścia ekspertów do rozpatrywanego problemu.

Jak już zostało wspomniane, jeśli chodzi o interpretację relacji porównywalności przedziałów, zestaw relacji \preceq , \preceq_π oraz \preceq_ν tworzy pewną całość z matematycznego punktu widzenia. Dlatego w swoich badaniach skupiłam się na tych właśnie relacjach, a w szczególności swoją uwagę poświęciłam relacjom \preceq_π oraz \preceq_ν a także pojęciom, które mogą być zdefiniowane przy pomocy tych relacji. Mianowicie, pod-

jęłam badania nad nowymi klasami operatorów agregacji, które w warunku monotoniczności zamiast tradycyjnie stosowanej relacji \preceq , uwzględniają zależność między przedziałami typu \preceq_π lub \preceq_ν . W pracy [11] wprowadziłam pojęcia agregacji możliwości oraz agregacji konieczności. W monografii podlegającej ocenie przedstawiłam dalsze wyniki badań nad nowymi klasami operatorów agregacji, w znaczący sposób poszerzającymi rezultaty z pracy [11]. Dodatkowo, przedstawiłam możliwe kierunki zastosowań nowych operatorów agregacji w zagadnieniach wielokryterialnego podejmowania decyzji oraz w zagadnieniach wykorzystujących metody sztucznej inteligencji, takich jak algorytmy klasyfikacji.

4.2.2.2 Nowe klasy operatorów agregacji dla rachunku przedziałowego. W monografii, w rozdziale drugim, zajęłam się badaniem następujących klas operatorów agregacji dla rachunku przedziałowego (por. [11]):

- *agregacja możliwości* (w skrócie *pos-agregacja*) $\mathcal{A} : (L^I)^n \rightarrow L^I$ (ang. possible aggregation function, pos-aggregation function), która spełnia własności

$$\forall_{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in L^I} \mathbf{x}_i \preceq_\pi \mathbf{y}_i \Rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \preceq_\pi \mathcal{A}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \quad (5)$$

$$\text{oraz } \underbrace{\mathcal{A}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})}_{n \times} = \mathbf{0}, \quad \underbrace{\mathcal{A}(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})}_{n \times} = \mathbf{1}.$$

- *agregacja konieczności* (w skrócie *nec-agregacja*) $\mathcal{A} : (L^I)^n \rightarrow L^I$ (ang. necessary aggregation function, nec-aggregation function), która spełnia własności

$$\forall_{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in L^I} \mathbf{x}_i \preceq_\nu \mathbf{y}_i \Rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \preceq_\nu \mathcal{A}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \quad (6)$$

$$\text{oraz } \underbrace{\mathcal{A}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})}_{n \times} = \mathbf{0}, \quad \underbrace{\mathcal{A}(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})}_{n \times} = \mathbf{1}.$$

W dalszym ciągu będę używać skróconej wersji nazw, czyli pos-agregacja i nec-agregacja. Warto zauważyć, że nowe operatory agregacji nie należą do rodziny agregacji zdefiniowanych na zbiorach będących kratami [42] (krata to struktura złożona z niepustego zbioru X z relacją częściowego porządku, w której każde dwa elementy posiadają supremum i infimum należące do zbioru X , por. [39]), gdyż jak już zostało wspomniane, relacje \preceq_π oraz \preceq_ν nie są porządkami częściowymi.

W monografii zbadałam zależności pomiędzy nowymi klasami agregacji a agregacjami klasycznie stosowanymi w rozmytym rachunku przedziałowym, czyli spełniającymi warunki

$$\forall_{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in L^I} \mathbf{x}_i \preceq \mathbf{y}_i \Rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \preceq \mathcal{A}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \quad (7)$$

$$\text{oraz } \underbrace{\mathcal{A}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})}_{n \times} = \mathbf{0}, \quad \underbrace{\mathcal{A}(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})}_{n \times} = \mathbf{1}.$$

W szczególności, moje badania dotyczyły operatorów $\mathcal{F} : (L^I)^n \rightarrow L^I$ dekomponowalnych (por. [23, 28]), czyli takich, dla których istnieją funkcje $F_1, F_2 : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ (komponenty) takie, że $F_1 \leq F_2$ i spełniające warunek

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = [F_1(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n), F_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)]$$

dla dowolnych $\mathbf{x}_1 = [\underline{x}_1, \bar{x}_1], \mathbf{x}_2 = [\underline{x}_2, \bar{x}_2], \dots, \mathbf{x}_n = [\underline{x}_n, \bar{x}_n] \in L^I$.

Pos-agregacje, nec-agregacje oraz agregacje klasycznie stosowane w rozmytym rachunku przedziałowym zdefiniowane są przy pomocy odpowiednio relacji \preceq_π, \preceq_ν oraz \preceq (por. warunki (5), (6), (7)), dla których spełniona jest zależność (4). Interesującym wynikiem, który uzyskałam jest analogiczna zależność dla odpowiednich klas agregacji, ale zachodząca jedynie w dziedzinie operatorów dekomponowalnych. To znaczy, jeśli założymy, że \mathcal{A} jest dekomponowalną nec-agregacją, to \mathcal{A} jest dekomponowalną agregacją w klasycznym sensie. Jeśli założymy, że \mathcal{A} jest dekomponowalną agregacją w klasycznym sensie, to \mathcal{A} jest dekomponowalną pos-agregacją. Zaprezentowałam też warunek wystarczający na to, by operator dekomponowalny był pos-agregacją. Dla nec-agregacji podałam charakteryzację w klasie operatorów dekomponowalnych.

4.2.2.3 Własności pos-agregacji i nec-agregacji. Zbadałam też zależności pomiędzy wspomnianymi klasami agregacji dla operatorów niedekomponowalnych. Na gruncie operatorów niedekomponowalnych uzyskałam różnorodne zależności między badanymi klasami agregacji, co przedstawiłam szczegółowo w monografii podlegającej ocenie. Między innymi, przytoczyłam warunki wystarczające na to, aby pseudomax A_1A_2 -reprezentowalna agregacja

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = [A_1(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n), \max(A_2(\underline{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n), A_2(\bar{x}_1, \underline{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n), \dots, A_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \underline{x}_n))],$$

lub pseudomin A_1A_2 -reprezentowalna agregacja

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = [\min(A_1(\bar{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n), A_1(\underline{x}_1, \bar{x}_2, \underline{x}_3, \dots, \underline{x}_n), \dots, A_1(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n-1}, \bar{x}_n)), A_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)],$$

była nec-agregacją. Ponadto, wyszczególniłam agregacje graniczne dla klas pos-agregacji oraz nec-agregacji. Wskazałam liczne przykłady agregacji należących do nowych klas pos-agregacji i nec-agregacji, w tym podałam przykłady operatorów, które należą do nowej klasy, ale nie należą do innych klas agregacji. Tym sposobem pokazałam, że uzyskane klasy stanowią istotne poszerzenie pojęcia operatora agregacji na nowy jej typ. Podałam też parametryzowane rodziny takich agregacji a także inne sposoby konstrukcji. Poniżej wskażę kilka przykładów takich konstrukcji dotyczących klasy pos-agregacji.

Niech $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, poniższa funkcja jest pos-agregacją (nie jest to agregacja przedziałowa w klasycznym sensie, ani nie jest to także nec-agregacja)

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \left[\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \dots + \underline{x}_n}{n}, \frac{\bar{x}_1^p + \bar{x}_2^p + \dots + \bar{x}_n^p}{\bar{x}_1^{p-1} + \bar{x}_2^{p-1} + \dots + \bar{x}_n^{p-1}} \right],$$

stosujemy tu konwencję $\frac{0}{0} = 0$, $\mathbf{x}_1 = [\underline{x}_1, \bar{x}_1]$, $\mathbf{x}_2 = [\underline{x}_2, \bar{x}_2]$, ..., $\mathbf{x}_n = [\underline{x}_n, \bar{x}_n] \in L^I$.

Niech $r \in \mathbb{R}$, $r > 1$, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 1$, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in (0, 1)$, $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 1$, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in (0, 1)$, $\underline{a} \leq \bar{a}$, $\underline{b} \leq \bar{b}$, $\underline{c} \leq \bar{c}$, oraz zachodzi warunek $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)^{-1} = 0$, gdy istnieje co najmniej jeden element $x_k = 0$. Następująca funkcja jest pos-agregacją (określoną z podanymi parametrami)

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \left[\underline{a} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} + \underline{b} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k + \underline{c} \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)^{-1}, \bar{a} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \bar{x}_k^2}{\sum_{k=1}^n \bar{x}_k} + \bar{b} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \bar{x}_k^3}{\sum_{k=1}^n \bar{x}_k^2} + \bar{c} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \bar{x}_k^r}{\sum_{k=1}^n \bar{x}_k^{r-1}} \right].$$

Pos-agregacje możemy też konstruować przykładowo w następujący sposób. Niech $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$, $\mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}]$ oraz $A : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ będzie agregacją w $[0, 1]$ z elementem zerowym 0. Następujące funkcje są agregacjami przedziałowymi w klasycznym sensie (niedekomponowalnymi) oraz są one pos-agregacjami (ale nie są one nec-agregacjami):

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} [0, 0], & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ([0, 0], [0, 0]) \\ [A(\underline{x}, \bar{y}), 1], & \text{poza tym,} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} [0, 0], & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ([0, 0], [0, 0]) \\ [A(\bar{x}, \underline{y}), 1], & \text{poza tym.} \end{cases}$$

W monografii podlegającej ocenie przeanalizowałam także zależności między pos-agregacjami i nec-agregacjami a agregacjami względem porządków liniowych. Pojęcie agregacji $\mathcal{A} : (L^I)^n \rightarrow L^I$ względem dopuszczalnego porządku liniowego \leq_{L^I} zostało wprowadzone stosunkowo niedawno w pracy [58]. Taka agregacja spełnia następujące warunki

$$\forall_{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in L^I} \mathbf{x}_i \leq_{L^I} \mathbf{y}_i \Rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \leq_{L^I} \mathcal{A}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$$

$$\text{oraz } \mathcal{A}(\underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{n \times}) = \mathbf{0}, \quad \mathcal{A}(\underbrace{\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}}_{n \times}) = \mathbf{1}.$$

W kontekście prowadzonych badań nad pos-agregacjami i nec-agregacjami, ich zależnościami z klasycznie stosowanymi w rozmytym rachunku przedziałowym agregacjami oraz agregacjami względem porządków liniowych, przytoczyłam też nowe

przykłady agregacji klasycznych oraz wskazałam warunki wystarczające na to, aby dekomponowalna agregacja była agregacją względem liniowego porządku \preceq_{Lex1} lub \preceq_{Lex2} . Przeprowadzone analizy zależności pomiędzy klasami pos-agregacji (czy też nec-agregacji) a agregacjami względem ustalonych porządków liniowych (takich jak \preceq_{Lex1} lub \preceq_{Lex2}) pokazały, że te klasy nie zawierają się w sobie, ale mogą mieć część wspólną.

Wynikiem moich prac badawczych jest także opracowanie sposobów konstrukcji operatorów pos-agregacji i nec-agregacji. Wykazałam, że w wyniku agregacji skończonej ilości pos-agregacji (czy też nec-agregacji) otrzymujemy pos-agregację (odpowiednio nec-agregację). Rozważałam też problem wyznaczenia operatora \mathcal{N} -dualnego (względem reprezentowalnej silnej negacji \mathcal{N}) do danego typu agregacji dekomponowalnej i pokazałam, że operator \mathcal{N} -dualny do danego zachowuje przynależność do tej samej klasy agregacji (pos-agregacji, nec-agregacji, czy też agregacji klasycznej). Wskazałam również metodę konstrukcji pos-agregacji i nec-agregacji z wykorzystaniem operacji złożenia i bijekcji rosnących.

Rozważałam także własności operatorów dla rachunku przedziałowego z uwzględnieniem pos-agregacji i nec-agregacji. Analizowałam najczęściej stosowane własności takie jak symetria, łączność, bisymetria, idempotentność, istnienie elementu neutralnego czy też elementu zerowego. Własności te mają swoją interpretację a co za tym idzie są użyteczne w zastosowaniach takich jak na przykład zagadnienia decyzyjne (por. [18], str. 10–17). Ponieważ własności operatorów określonych dla rachunku przedziałowego często zależą od własności ich komponentów określonych na osi liczbowej, dlatego skupiłam się na analizie tego typu zależności - pomiędzy własnościami komponentów a odpowiednimi własnościami operatorów, które te komponenty określają. Podałam charakteryzację dekomponowalnych nec-agregacji symetrycznych, łącznych, bisymetrycznych, idempotentnych, posiadających element neutralny, posiadających element zerowy. Analizowałam też własności operatorów niedekomponowalnych, takich jak pseudomax A_1A_2 -reprezentowalnych czy też pseudomin A_1A_2 -reprezentowalnych.

W monografii podlegającej ocenie zaprezentowałam również problematykę zachowywania szerokości przedziałów przez klasy operatorów pos-agregacji i nec-agregacji. Ponieważ szerokość przedziału jest swego rodzaju miarą niepewności, którą reprezentuje przedział, więc ze względu na różne zastosowania, wiedza jaką szerokość będzie miał przedział wynikowy po agregacji może być istotną informacją. Dla wybranych agregacji oszacowałam szerokość przedziału wynikowego, otrzymanego po agregacji, w zależności od szerokości przedziałów wejściowych.

4.2.2.4 Zagadnienia decyzyjne z użyciem pos-agregacji i nec-agregacji. Oprócz pojęć agregacji, takich jak pos-agregacja i nec-agregacja, można też definiować inne pojęcia wykorzystujące w swoich definicjach relacje porównywalności. Jednym

z takich terminów jest przechodniość. Własność przechodniości jest jedną z najbardziej istotnych własności jeśli chodzi o problemy decyzyjne w kontekście relacji preferencji. Własność ta w pewnym sensie gwarantuje niesprzeczność dokonywanych wyborów, gdyż jeśli relacja preferencji R opisująca wybory eksperta jest przechodnia w zbiorze X , to gdy xRy i yRz , to zachodzi także xRz , dla dowolnych $x, y, z \in X$. Dla rachunku zbiorów rozmytych, czy też przedziałowych zbiorów rozmytych, wprowadzono wiele typów przechodniości. Między innymi dla rozmytego rachunku przedziałowego zostały zaproponowane pojęcia pos-przechodniości i nec-przechodniości (por. [48]), wywodzące się z zastosowania relacji \preceq_π oraz \preceq_ν do zdefiniowania tych pojęć. Przedziałową relacją rozmytą R w zbiorze X nazywamy funkcję $R : X \times X \rightarrow L^I$ taką, że $R(x, y) = [\underline{R}(x, y), \overline{R}(x, y)] \in L^I$, dla wszystkich par $(x, y) \in (X \times X)$, gdzie \underline{R} i \overline{R} są relacjami rozmytymi w X . Zbiór wszystkich przedziałowych relacji rozmytych w X oznaczamy $\mathcal{IVFR}(X)$. Niech $B : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ będzie dowolnym działaniem binarnym. Relację $R = [\underline{R}, \overline{R}] \in \mathcal{IVFR}(X)$ nazywamy:

- nec- B -przechodnią, gdy

$$B(\overline{R}(x, y), \overline{R}(y, z)) \leq \underline{R}(x, z), \quad x, y, z \in X,$$

- pos- B -przechodnią, gdy

$$B(\underline{R}(x, y), \underline{R}(y, z)) \leq \overline{R}(x, z), \quad x, y, z \in X.$$

W monografii przedstawiłam charakteryzację podanych typów przechodniości za pomocą operacji złożenia relacji. Moje badania dotyczyły głównie zachowywania tych typów własności przez nec-agregacje i pos-agregacje, co stanowi istotną informację w zastosowaniach dotyczących wielokryterialnego podejmowania decyzji. Dlatego podałam warunki wystarczające, dla różnych typów operatorów agregacji, na zachowywanie pos- B -przechodniości oraz nec- B -przechodniości. W zagadnieniach wielokryterialnego podejmowaniu decyzji mamy do czynienia ze zbiorem alternatyw $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, który jest oceniany pod kątem danego zbioru kryteriów. W rezultacie otrzymujemy zestaw $R_1, \dots, R_n \in \mathcal{IVFR}(X)$ relacji odzwierciedlających preferencje eksperta względem danego zbioru kryteriów. W celu podjęcia ostatecznej decyzji odnośnie wyboru alternatywy, dokonuje się zazwyczaj agregacji otrzymanych relacji. W takiej sytuacji, z praktycznego punktu widzenia dla zachowania niesprzeczności przy finalnym wyborze alternatywy, wskazane jest, by dana agregacja \mathcal{A} zachowywała własności relacji R_1, \dots, R_n . Wtedy relacja wyjściowa (po agregacji) $R_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(R_1, \dots, R_n)$ odzwierciedla własności wejściowych relacji preferencji R_1, \dots, R_n . Monotoniczność w danej klasie przechodniości względem działania B umożliwia wyznaczenie wspólnego dla każdej z agregowanych relacji typu przechodniości. Mianowicie, niech $B_1, B_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ oraz $B_1 \leq B_2$. Jeśli $R \in \mathcal{IVFR}(X)$ jest pos- B_2 -przechodnia (nec- B_2 -przechodnia), to R jest pos- B_1 -przechodnia (nec- B_1 -przechodnia). Zaproponowałam stosowanie tego samego typu

agregacji, co wyznaczony dla relacji rodzaj przechodniości, aby odzwierciedlić typ interpretacji (*możliwość* lub *konieczność*) w wykorzystywanych pojęciach. Zatem dla pos-przechodnich relacji, odpowiednie byłoby stosowanie pos-agregacji a dla nec-przechodnich relacji odpowiednie byłoby stosowanie nec-agregacji. W monografii podałam następujący algorytm dla potrzeb wielokryterialnego podejmowania decyzji.

1. Sprawdzenie typu przechodniości (pos- B -przechodniość, nec- B -przechodniość) dla relacji R_1, \dots, R_n .
2. Ustalenie wspólnego typu przechodniości (w zależności od działania B) dla relacji R_1, \dots, R_n .
3. Wyznaczenie R_A z użyciem agregacji \mathcal{A} (odpowiednio pos-agregacji lub nec-agregacji).
4. Wyznaczenie najlepszej alternatywy.

Przed wyznaczaniem najlepszej z alternatyw, często zachodzi potrzeba normalizacji otrzymanej relacji R_A do relacji spełniającej warunek tzw. N -wzajemności (ang. N -reciprocity). Ze względu na zastosowania, pojęcie to jest definiowane w zbiorze skończonym. Relację w zbiorze skończonym m -elementowym możemy przedstawić w postaci macierzy stopnia m . Rozmyta przedziałowa relacja R w zbiorze skończonym X , oznaczana $R = (R_{ij})_{m \times m}$, gdzie $R_{ij} = [\underline{R}(i, j), \bar{R}(i, j)]$ dla $i, j \in \{1, \dots, m\}$, spełnia warunek N -wzajemności (por. [7]), gdy $R_{ii} = [0.5, 0.5]$, $R_{ji} = [N(\bar{R}(i, j)), N(\underline{R}(i, j))]$ ($N : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ jest negacją rozmytą, czyli jest funkcją malejącą taką, że $N(0) = 1$, $N(1) = 0$). Relacja preferencji R jest przedstawiana w postaci trójki relacji P, I, J , gdzie P jest nazywana ścisłą preferencją, I jest relacją nierozróżnialności, J jest relacją nieporównywalności oraz $P_{ij} = \mathcal{A}(R_{ij}, \mathcal{N}(R_{ji}))$, $I_{ij} = \mathcal{B}(R_{ij}, R_{ji})$, $J_{ij} = \mathcal{B}(\mathcal{N}(R_{ij}), \mathcal{N}(R_{ji}))$, gdzie \mathcal{A} i \mathcal{B} są agregacjami, \mathcal{N} jest rozmytą negacją przedziałową (por. [7]). W swoich badaniach zaproponowałam utworzenie trójki relacji P, I, J przy użyciu dekomponowalnych pos-agregacji i nec-agregacji. Dla takiego przypadku podałam warunek konieczny i wystarczający na to, by relacja preferencji pokrywała się z relacją ścisłej preferencji (czyli $P = R$). Dla relacji ścisłej preferencji (utworzonej z danej relacji preferencji) można stosować różne metody wyboru najlepszej alternatywy, na przykład metodę *najmniej zdominowanej alternatywy* (ang. non-dominance method, por. [46]). W przedstawionych rozważaniach zastosowałam tę właśnie metodę dostosowaną do rozmytego rachunku przedziałowego (por. [2]).

4.2.2.5 Optymalizacja działania algorytmu k -NN w przypadku brakujących danych. Jakość klasyfikatorów obniża się znacząco w przypadku występowania dużej

ilości pustych miejsc (ang. missing values) w testowych tablicach danych. Klasyfikatory [43] są zwykle tworzone na danych treningowych, które nie mają dużo pustych miejsc lub nawet nie mają ich wcale. Dzięki temu potrafią rozpoznawać przypadki testowe w oparciu o wartości atrybutów warunkowych. Problem występowania pustych miejsc w obiektach testowych rozwiązywany jest na różne sposoby. W swoich badaniach, poprzez zastosowanie nowatorskiego algorytmu klasyfikującego pokazałam, że zastosowanie rozmytego rachunku przedziałowego wraz z przedziałowymi agregacjami pozwala na polepszenie jakości klasyfikacji mimo braku danych w obiektach testowych.

Zajęłam się optymalizacją działania algorytmu k najbliższych sąsiadów k - NN , jako jednego z typowych algorytmów, który z definicji wykorzystuje wszystkie atrybuty warunkowe do klasyfikacji obiektu testowego. Z tego powodu, dla tego typu algorytmów mogą pojawić się największe problemy z poprawnością klasyfikacji danych w przypadku występowania pustych miejsc w obiektach testowych. W badaniach porównałam działanie klasycznego algorytmu k - NN (dla różnych wartości k), oznaczanego C z klasyfikatorem oznaczanym M oraz klasyfikatorem oznaczanym F . Wszystkie klasyfikatory były typu binarnego. Rozważana była klasa decyzyjna główna i podrzędna. Klasą główną może być na przykład klasa pacjentów chorych na dana chorobę, a klasą podrzędną klasa zdrowych pacjentów. Klasyfikator M wykorzystuje metodę agregacji współczynników pewności uzyskiwanych dla klasycznych klasyfikatorów k - NN (dla różnych wartości k), gdzie do agregacji stosowana jest zwykła średnia arytmetyczna o wartościach liczbowych.

W przypadku klasyfikatora F , dla ustalonej rodziny parametrów k , każdy klasyfikator k - NN wyznacza przedział niepewności przynależności obiektu testowego do klasy głównej. Obiekt testowy mający puste miejsca jest klasyfikowany przez dany klasyfikator k - NN w taki sposób, że dokonywanych jest wiele klasyfikacji różnych obiektów, które są konstruowane w oparciu o dany obiekt testowy. Konstrukcja tych obiektów polega na tym, że puste miejsca w danym obiekcie wypełniane są na różne sposoby w oparciu o wartości z danych treningowych. Stosowana jest metoda Monte Carlo wyboru powyższych obiektów. Metoda ta polega na tym, że w przestrzeni wszystkich możliwych obiektów, które można wygenerować dla danego obiektu testowego z pustymi miejscami, wybierana jest próbka losowa. Wynikiem każdej takiej klasyfikacji jest wartość współczynnika pewności przynależności obiektu do klasy głównej. Dzięki tym wartościom można wyznaczyć przedział niepewności poprzez wyznaczenie minimum tych wartości (dolny koniec przedziału) oraz maksimum (górny koniec przedziału). Następnie wykorzystywana jest metoda agregacji przedziałów w celu uzyskania finalnego przedziału niepewności. Finalny przedział niepewności jest używany do sklasyfikowania obiektu na poziomie odpowiadającym punktowi środkowemu finalnego przedziału niepewności. W algorytmie F zastosowałam następujące operatory agregacji przedziałowych, w tym pos-agregacje i nec-agregacje:

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \left[\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \dots + \underline{x}_n}{n}, \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{n} \right], \quad (8)$$

$$\mathcal{A}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \left[\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \dots + \underline{x}_n}{n}, \max \left(\frac{\underline{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{n}, \frac{\bar{x}_1 + \underline{x}_2 + \bar{x}_3 + \dots + \bar{x}_n}{n}, \dots, \frac{\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{n-1} + \underline{x}_n}{n} \right) \right], \quad (9)$$

$$\mathcal{A}_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \left[\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \dots + \underline{x}_n}{n}, \frac{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \dots + \bar{x}_n^2}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n} \right], \quad (10)$$

$$\mathcal{A}_4(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \left[\frac{\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \dots + \underline{x}_n}{n}, \frac{\bar{x}_1^3 + \bar{x}_2^3 + \dots + \bar{x}_n^3}{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \dots + \bar{x}_n^2} \right], \quad (11)$$

$$\mathcal{A}_5(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \left[\sqrt{\frac{\underline{x}_1^2 + \underline{x}_2^2 + \dots + \underline{x}_n^2}{n}}, \sqrt[3]{\frac{\bar{x}_1^3 + \bar{x}_2^3 + \dots + \bar{x}_n^3}{n}} \right], \quad (12)$$

$$\mathcal{A}_6(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \left[\sqrt[3]{\frac{\underline{x}_1^3 + \underline{x}_2^3 + \dots + \underline{x}_n^3}{n}}, \sqrt[4]{\frac{\bar{x}_1^4 + \bar{x}_2^4 + \dots + \bar{x}_n^4}{n}} \right]. \quad (13)$$

Do oceny jakości analizowanych metod użyłam miary AUC, która jest polem powierzchni pod krzywą ROC [34]. Uzyskane wyniki potwierdzają wyższość metody F nad metodą M i C , to znaczy wraz ze wzrostem ilości brakujących danych w obiektach testowych jakość klasyfikacji malała, ale klasyfikator F (z zastosowaniem różnych agregacji przedziałowych) uzyskał najlepsze wyniki klasyfikacji na każdym z rozpatrywanych zbiorów danych. Obserwacje te zostały potwierdzone metodami statystycznymi. Generalnie, klasyfikator F uzyskał statystycznie istotnie lepsze rezultaty od klasyfikatora C i znacznie lepsze (ale nie istotnie statystycznie) od klasyfikatora M , podobnie klasyfikator M uzyskał lepsze rezultaty (ale nie istotnie statystycznie) od klasycznego klasyfikatora C . Zatem dopiero zastosowanie agregacji przedziałowych pozwoliło na uzyskanie statystycznie istotnie lepszych rezultatów. Ponadto, została potwierdzona użyteczność nowych klas agregacji, czyli pos-agregacji i nec-agregacji, które w zależności od zbioru danych i poziomu brakujących wartości w obiektach testowych osiągały najlepsze rezultaty w klasyfikacji metodą F . Dodatkowo, pokazałam, że klasyfikator F najlepiej radzi sobie ze wzrostem brakujących danych w porównaniu z klasyfikatorami M i C . Biorąc pod uwagę zależność pomiędzy wartościami AUC i ilością brakujących danych, metoda F okazała się istotnie statystycznie lepsza od metody M , a metoda M istotnie statystycznie lepsza od metody C .

Jedną z najważniejszych implementacji algorytmu k - NN jest implementacja w bibliotece WEKA API [37], którą wykorzystałam w przeprowadzonych eksperymentach. Do obliczenia odległości wykorzystałam klasyczną metrykę Euklidesową. Mechanizm radzenia sobie z wartościami brakującymi w bibliotece WEKA API działa przy obliczaniu odległości pomiędzy wartościami na danym atrybucie. Zróżnicowanie wartości atrybutu numerycznego dla dwóch obiektów (takie tylko występowały w analizowanych przeze mnie zbiorach danych) to wartość bezwzględna różnicy ich wartości, przy czym wartości wszystkich atrybutów są normalizowane. Jeśli obydwie wartości atrybutów są dane, to wyznaczana jest dla nich wartość bezwzględna ich różnicy. Jeśli obydwie wartości atrybutów są brakujące, to ich różnica wynosi 1. Jeśli jedna wartość atrybutu jest brakująca, a druga wynosi v , to jako różnica brana jest wartość $\max(v, 1 - v)$, czyli ta różnica jest tak duża, jak to jest możliwe. Zatem jak widać, przy klasyfikacji obiektów klasyczną metodą k - NN , jeśli obiekty testowe mają brakujące wartości atrybutów, to brak tych wartości powoduje niejako lekkie "odsunięcie" tych obiektów od obiektów treningowych (bez pustych miejsc). W rezultacie, obiekt testowy z dużą liczbą pustych miejsc może być zbyt mocno odsuwany od obiektów treningowych i może zbliżyć się do obiektów treningowych z niewłaściwej klasy. To powoduje mylną jego klasyfikację w metodzie C . Natomiast w metodzie F , dzięki losowemu wypełnianiu pustych miejsc, uzyskujemy obiekty, które są mniej odsunięte od obiektów treningowych. Dlatego metoda F uzyskuje lepsze rezultaty niż metoda C . Metoda F wykorzystująca agregację przedziałów niepewności, a nie wartości współczynników pewności jak w metodzie M , niejako na wejściu posiada więcej wiedzy (wiedzy dziedzinowej), która jest agregowana celem podjęcia ostatecznej decyzji o przynależności obiektu testowego do klasy głównej lub podrzędnej. Dzięki temu, klasyfikator F ma większe szanse na podjęcie dobrej decyzji od klasyfikatora opartego na metodzie M .

Algorytm, który zaproponowałam w metodzie F ma niewysoką złożoność obliczeniową czasową, pozwalającą na zastosowanie w praktyce metody F w tych sytuacjach, w których może być stosowany klasyczny k - NN . Zakładając, że złożoność obliczeniowa czasowa klasycznego k - NN jest rzędu $O(n \cdot l)$, gdzie n jest liczbą obiektów a l jest ilością atrybutów, widzimy, że złożoność obliczeniowa czasowa algorytmu w metodzie F jest rzędu $O(m \cdot r \cdot n \cdot l)$, gdzie m jest ilością klasycznych klasyfikatorów k - NN wykorzystanych w metodzie F oraz r jest parametrem w metodzie Monte Carlo. Opisane algorytmy zostały zaimplementowane w systemie FuzzyDataMiner [24].

4.2.2.6 Optymalizacja działania algorytmu k - NN dla danych mikromacierzowych. Głównymi celami eksperymentów z mikromacierzami są odkrywanie i identyfikacja genów lub grup genów o podobnej albo zróżnicowanej ekspresji oraz zastosowanie ekspresji do oznaczania (klasyfikacji) próbek biologicznych (por. [51]).

Z informatycznego punktu widzenia, mikromacierz jest reprezentowana jako prostokątna tablica liczb wymiernych, gdzie wiersze tablicy odpowiadają genom, a kolumny próbkom biologicznym. Natomiast wartości w tablicy odpowiadają wartości ekspresji genu z danego wiersza mierzonego dla materiału z danej kolumny. Jednak do eksperymentów informatycznych często transponuje się powyższą tablicę otrzymując tzw. mikromacierzową tablicę decyzyjną, gdzie wiersze odpowiadają próbkom (np. pacjentom), a kolumny genom. Dodatkowo jako ostatni dodawany jest specjalny atrybut, zwany decyzyjnym, opisujący własność pacjentów wymagającą predykcji na podstawie wartości ekspresji genów. Umożliwia to np. predykcję faktu, czy dany pacjent jest odporny na pewną chorobę, jaki jest poziom zagrożenia pacjenta podczas choroby, jaki lek należy pacjentowi podać, czy można wyleczyć pacjenta z pewnej choroby itd. Mikromacierzowe tablice decyzyjne cechują się dużą liczbą kolumn (nawet ponad 60 tysięcy) i małą liczbą wierszy (maksymalnie kilkuset). Dysproporcja ta wynika z dużej liczby znanych genów oraz spowodowana jest dużym kosztem finansowym analizy każdej próbki biologicznej.

W swoich badaniach nad mikromacierzami zajęłam się konstrukcją klasyfikatora opartego na algorytmie k - NN . W kontekście danych mikromacierzowych pojawiają się różne problemy przy stosowaniu klasycznej wersji k - NN (por. [19, 20, 50]). Przykładowo, k - NN bada zróżnicowanie ekspresji par obiektów na wszystkich genach, co staje się nieefektywne czasowo, gdyż genów jest bardzo dużo. Istnieją różne sposoby radzenia sobie z tymi problemami a jedną z nich jest grupowanie atrybutów, które polega na tym, że atrybuty dzielone są na grupy, dla których osobno konstruowane są klasyfikatory. Następnie działanie tych klasyfikatorów jest odpowiednio agregowane przez specjalny meta-klasyfikator. Taką właśnie metodą zajęłam się w swoich badaniach. Do ekstrakcji grup atrybutów wykorzystana została metoda losowa, która polega na konstruowaniu grupy atrybutów za pomocą losowania bez zwracania, przy czym warunek stopu generowania takiej grupy opiera się na założeniu, że konstruowanie grupy kończy się, gdy obszar pozytywny (ang. *positive region*) wybranej grupy atrybutów względem atrybutu decyzyjnego osiągnie 100%, tzn. każde dwa obiekty z tablicy z różnych klas decyzyjnych są rozróżnialne za pomocą chociaż jednego atrybutu warunkowego z wybranej grupy atrybutów (por. [47]). Liczba wybranych grup atrybutów, oznaczana przez s , może wahać się od kilkunastu do kilkuset. Dla tablic składających się z wybranych atrybutów oraz atrybutu decyzyjnego, zostały zbudowane klasyfikatory k - NN o ustalonym k . Natomiast meta-klasyfikator, rozstrzygający konflikty pomiędzy klasyfikatorami niższego poziomu, został utworzony na dwa sposoby. Pierwszy sposób (w metodzie M) polega na policzeniu średniej arytmetycznej współczynników klasyfikacji do klasy głównej, wyliczonych dla obiektu testowego przez klasyfikatory niższego poziomu oraz sprawdzeniu, czy ta średnia jest powyżej lub poniżej pewnego ustalonego progu. Drugi sposób (w metodzie F) wykorzystuje agregację przedziałów niepewności

wyliczonych w oparciu o klasyfikatory niższego poziomu. Agregacje przedziałowe, które zostały użyte w eksperymentach to agregacje (8) - (13).

Zastosowane klasyfikatory są typu binarnego. Rozważane są dwie klasy - główna i podrzędna. Klasą główną może być np. klasa chorych pacjentów na daną chorobę, a klasą podrzędną klasa zdrowych pacjentów. Następnie za pomocą losowania bez zwracania generowanych jest s grup atrybutów w taki sposób, aby obszar pozytywny podtablic każdej z tych grup względem oryginalnego atrybutu decyzyjnego wyniósł 100%. Przez obszar pozytywny grupy G atrybutów warunkowych względem danego atrybutu decyzyjnego, rozumiemy liczbę $\frac{\tilde{n}}{n} \cdot 100\%$, gdzie n jest liczbą wszystkich obiektów (wierszy) w tablicy decyzyjnej, a \tilde{n} to liczba obiektów takich, że dla dowolnego z tych obiektów nie istnieje inny obiekt, który ma takie same wartości na atrybutach z G , ale ma inną wartość atrybutu decyzyjnego (por. [47]). Dla każdej z podtablic konstruowane są klasyfikatory k - NN dla ustalonego k . W przypadku metody M , wyliczana jest średnia arytmetyczna współczynników pewności wyznaczonych dla obiektu testowego przez s klasyfikatorów niższego poziomu. Następnie sprawdzane jest, czy policzona średnia jest powyżej lub poniżej pewnego ustalonego progu t (np. $t = 0.5$). Natomiast w przypadku metody F podtabele w liczbie s są dzielone na h grup G^i ($i = 1, \dots, h$), w każdej grupie po v klasyfikatorów G_1^i, \dots, G_v^i ($s = h \cdot v$). W oparciu o każdą grupę dla obiektu testowego wyliczany jest przedział niepewności dla tego obiektu $[\min_i, \max_i]$, gdzie \min_i jest minimum spośród wszystkich współczynników pewności policzonych dla obiektu testowego przez klasyfikatory z grupy G^i . Analogicznie, \max_i jest maksimum spośród wszystkich współczynników pewności policzonych dla obiektu testowego przez klasyfikatory z grupy G^i . Po wyznaczeniu przedziałów niepewności są one agregowane jedną z agregacji (8) - (13). Tym sposobem uzyskujemy po agregacji przedział niepewności, który jest wykorzystywany do klasyfikacji obiektu testowego w następujący sposób. Wyznaczany jest środek tego przedziału a następnie sprawdzane jest, czy policzona średnia jest powyżej lub poniżej pewnego ustalonego progu t (np. $t = 0.5$).

Do oceny efektywności analizowanych metod użyłam nowo zdefiniowanej miary jakości klasyfikacji DACC (ang. accuracy differentiating the decision classes or concepts)

$$DACC = ACC \cdot (1 - |SN1 - SN2|),$$

gdzie ACC oznacza dokładność dla całości danych testowych, a $SN1$ i $SN2$ to wartości czułości odpowiednio dla pierwszej i drugiej klasy decyzyjnej (por. [41]). Zatem szukamy takiego punktu na krzywej ROC, dla którego miara DACC przyjmuje maksymalną wartość, czyli jednocześnie dokładność ACC jest wysoka jak i czułości dla obydwóch klas decyzyjnych są zbliżone. W ten sposób wykluczamy sytuację, gdy uznamy metodę za dobrą wtedy, gdy ma wysoką dokładność, ale wynika ona z wysokiego poziomu czułości dla jednej z klas decyzyjnych. Ma to szczególnie znaczenie wtedy, gdy dane są niezbalansowane, tzn. jedna klasa decyzyjna góruje liczebnością

nad drugą. Taka sytuacja występowała w analizowanych przeze mnie danych mikromacierzowych. Przedstawione podejście jest istotne w zastosowaniach medycznych, gdzie mamy do czynienia z rozpoznawaniem przynależności obiektów testowych do pewnych klas decyzyjnych związanych ze stanem medycznym pacjenta. Zatem może zachodzić potrzeba znalezienia punktu na krzywej ROC, który spełnia pewne konkretne warunki.

Ponadto, aby ustrzec się przed negatywnymi skutkami niezbalansowanych klas decyzyjnych w analizowanych danych, w eksperymentach został zastosowany dodatkowy mechanizm regulacji wartości miary DACC. Mianowicie, wartości współczynników klasyfikacji dostarczone przez klasyfikatory niższego poziomu były przemnażane przez specjalny, ustalony parametr zwany mnożnikiem b , którego celem było zniwelowanie zbyt dużego wpływu na klasyfikację ze strony większej klasy decyzyjnej. Wszystkie mnożniki dobierane były eksperymentalnie do każdego z danych osobno, dla wybrania takiego punktu krzywej ROC, który maksymalizuje wartość miary jakości DACC. Jednocześnie, w ten sam sposób dobierany był wspomniany wyżej próg t używany do sklasyfikowania obiektu testowego do klasy głównej lub podrzędnej.

Analiza wyników przeprowadzonych eksperymentów pokazuje, że najwyższe wartości dokładności ACC były uzyskiwane dla największej ilości podtabel s . Wartość $s = v \cdot h$ zależy od wartości h , czyli ilości agregowanych przedziałów, to znaczy źródeł informacji o danych, oraz od wartości v , czyli ilości klasyfikatorów niższego poziomu w każdej z grup użytych do wyznaczenia przedziału niepewności. Metoda F okazała się lepsza od metody M . Zastosowane testy statystyczne dla każdej ilości v klasyfikatorów niższego poziomu pokazały, że najwyższa wartość ACC dla metody F jest statystycznie istotnie lepsza niż najwyższa wartość ACC dla metody M .

Metoda F osiąga lepsze wyniki niż metoda M , gdyż agregacja współczynników klasyfikacji w metodzie M za pomocą średniej arytmetycznej nie wykorzystuje specjalnych metod agregacji, które dostępne są w metodzie F . Agregacje zastosowane w metodzie F mogą doprowadzić do poprawy jakości klasyfikacji, ponieważ biorą pod uwagę dodatkową informację o minimalnym i maksymalnym współczynniku klasyfikacji w poszczególnych grupach klasyfikatorów a następnie odpowiednio je agregują.

Złożoność obliczeniowa podanego przeze mnie algorytmu w metodzie F nie jest wysoka i wskazany algorytm może być używany w praktycznych zastosowaniach do eksploracji mikromacierzy DNA. Załóżmy, że złożoność obliczeniowa czasowa klasycznego algorytmu k -NN jest rzędu $O(n \cdot l)$, gdzie n jest liczbą obiektów oraz l jest ilością atrybutów. Wtedy złożoność obliczeniowa czasowa podanego algorytmu jest rzędu $O(s \cdot n \cdot f)$, gdzie s jest ilością podtabel, n jest ilością obiektów oraz f jest to maksymalna ilość atrybutów warunkowych, które poprzez losowy wybór atrybutów, pozwalają otrzymać obszar pozytywny dla wybranego zbioru atrybutów

względem atrybutu decyzyjnego wynoszący 100%. W praktyce f jest dużo mniejsze niż l . Przedstawione algorytmy zostały zaimplementowane w systemie FuzzyData-Miner [24].

Opisane zastosowania modelowania przedziałowego do konstrukcji klasyfikatorów wykorzystują stosunkowo proste podejście do generowania decyzji dla obiektu testowego w oparciu o wygenerowany przez klasyfikator przedział niepewności. Polega ono na tym, że w przypadku wygenerowania dla obiektu testowego przedziału niepewności $[a, b]$, decyzja jest podejmowana w oparciu o wartość środka przedziału $w = \frac{a+b}{2}$, z wykorzystaniem progu t . Jeśli $w > t$, to obiekt jest klasyfikowany do klasy głównej, a gdy $w \leq t$, to obiekt testowy jest klasyfikowany do klasy podrzędnej. Jednak dla klasyfikatora działającego w oparciu o modelowanie przedziałowe można inaczej generować końcową decyzję dla obiektu testowego (por. [53]). Na przykład, można wykorzystać przedział $[a, b]$ i próg t w taki sposób, że gdy dla obiektu testowego zachodzi $t < a$ (wszystkie elementy przedziału $[a, b]$ są większe od t), to obiekt testowy jest klasyfikowany do klasy głównej. Analogicznie, gdy dla obiektu testowego jest $b < t$ (wszystkie elementy przedziału $[a, b]$ są mniejsze od t), to obiekt testowy jest klasyfikowany do klasy podrzędnej. Natomiast, gdy $a \leq t \leq b$, obiekt testowy nie jest jednoznacznie klasyfikowany, co określamy w ten sposób, że następuje klasyfikacja do tzw. obszaru niepewności. Można oczekiwać, że dzięki wprowadzeniu obszaru niepewności wzrośnie dokładność klasyfikacji zarówno do klasy głównej jak i podrzędnej (w porównaniu do poprzedniej metody). Jednak obszar niepewności reprezentujący obiekty testowe, które nie są klasyfikowane (a dokładnie są klasyfikowane do obydwu klas) nie powinien być zbyt duży. Obecnie przygotowuję publikację dotyczącą takiej metody klasyfikacji. Zostały przeprowadzone eksperymenty na rzeczywistych zbiorach danych mikromacierzowych, które potwierdziły, że rozważając wspomniany wyżej obszar niepewności, można uzyskać znacznie wyższą jakość klasyfikacji zarówno dla klasy głównej, jak i podrzędnej. Ponadto, takie podwyższenie jakości klasyfikacji często wiąże się ze stosunkowo niedużym obszarem niepewności.

Przy konstruowaniu klasyfikatorów wykorzystujących modelowania przedziałowe w pracy będącej osiągnięciem podlegającym ocenie wykorzystano metodę optymalizacji działania klasyfikatora poprzez dobór parametrów jego działania, które były dobierane w oparciu o dane testowe. Wykorzystywano przy tym miarę DACC. Jak pisałam wcześniej, odpowiada to wyszukaniu konkretnego punktu na krzywej ROC, który odpowiada naszym oczekiwaniom. Jednak można by powiedzieć, że do wyszukania optymalnego dla nas klasyfikatora wykorzystywana jest tzw. "wiedza z przyszłości", czyli wiedza z testowej próbki danych, która przecież nie powinna być dostępna na etapie tworzenia klasyfikatora. Należy jednak tutaj podkreślić, że w opisywanych badaniach chodziło o zaproponowanie metody wyszukiwania klasyfikatora w oparciu o dwie rozłączne próbki danych: treningową (na której klasyfikator skon-

struowano) i testową lub raczej walidacyjną, na której optymalizowano parametry klasyfikatora. Jeśli jednak zależy nam na testowaniu klasyfikatora na danych, które nie były dostępne podczas generowania i optymalizowania klasyfikatora, to można zastosować jedną z poniżej opisanych metod. Mianowicie, zamiast optymalizować parametry na tablicy testowej, można to robić z wykorzystaniem tablicy treningowej, ponieważ metoda k - NN nie tworzy stałego modelu, ale podczas testowania wykorzystuje obiekty treningowe. Stąd możliwe jest optymalizowanie klasyfikatora za pomocą danych treningowych. Na przykład, w literaturze można znaleźć doniesienia o skutecznych metodach optymalizacji liczby sąsiadów w metodzie k - NN w oparciu o dane treningowe [52]. Druga metoda polega na tym, że dane dzielimy na trzy rozłączne części, które nazywamy: treningową, walidacyjną i testową. Pierwszą z nich używamy do skonstruowania klasyfikatora, drugą do optymalizacji jego parametrów i trzecią do testowania. Taka metoda jest dość często spotykana, choćby w istniejących systemach eksploracji danych. Można się spodziewać, że w przypadku reprezentatywnego losowania wspomnianych wyżej próbek danych (treningowa, walidacyjna, testowa), wyniki eksperymentów będą podobne jak w przypadku eksperymentów opisanych w monografii podlegającej ocenie.

4.2.2.7 Pos-agregacje i nec-agregacje w komputerowych systemach wspomagania decyzji. W monografii podlegającej ocenie przedstawiłam także miary jakości dla operatorów pos-agregacji i nec-agregacji zastosowanych w komputerowym systemie wspomagania decyzji OvaExpert [33] zaprojektowanym dla celów wykrywania nowotworów jajnika. Zostały zaimplementowane przykłady nowych typów agregacji na bazie kodów źródłowych wykorzystanych w OvaExpert, dostępnych na GitHub [38]. System ten składa się z kilku modułów. Wspomniane agregacje zaimplementowałam w module OEA, w którym zastosowano metodę tak zwaną *uncertyfikacją* istniejących modeli diagnostycznych, umożliwiającą działanie tych modeli na danych przedziałowych. Następnym krokiem w tym module jest agregacja danych przedziałowych z wykorzystaniem różnych operatorów agregacji. W ostatnim etapie stosowane są różne strategie progowania w celu uzyskania możliwie trafnej decyzji. Celem fazy uczenia jest optymalizacja parametrów operatorów agregujących i strategii progowania dla różnych poziomów brakujących danych. Analiza danych określonych w przedziale $[0, 1]$, do czego został zastosowany rozmyty rachunek przedziałowy, i późniejsza agregacja tych danych, pozwala na redukcję negatywnych czynników (takich jak brak pełnych danych). Ostatecznie, takie podejście okazało się pomocne przy podejmowaniu właściwej decyzji odnośnie leczenia pacjentek. Opracowana metoda optymalizacji doboru funkcji agregującej pozwala między innymi na dobór możliwie najlepszej agregacji. W module OEA zastosowałam różne przykłady pos-agregacji i nec-agregacji zdefiniowane w pracy [11]. Zostały wyodrębnione następujące przykłady wymienionych klas agregacji, które osiągnęły najlepsze

rezultaty:

$$\mathcal{A}_{pi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} [1, 1], & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ([1, 1], [1, 1]) \\ \left[\frac{y \frac{x+\bar{x}}{2}}{2}, \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2} \right], & \text{poza tym} \end{cases}$$

która jest pos-agregacją, ale nie jest to nec-agregacja oraz

$$\mathcal{A}_{nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\frac{x+y}{2}, \max \left(\frac{x+\bar{y}}{2}, \frac{\bar{x}+y}{2} \right) \right],$$

która jest nec-agregacją, ale nie jest to pos-agregacja. Klasyfikacja była binarna, decyzja była dzielona na dwie klasy - pozytywną (nowotwór złośliwy) i negatywną (nowotwór łagodny). Do oceny jakości klasyfikacji zostały zastosowane następujące miary: czułość, specyficzność, decyzyjność, precyzja, macierz (funkcja) kosztu. Funkcja kosztu wyznaczana jest w taki sposób, że dla każdego rodzaju błędu klasyfikatora przypisywane są kary za błędną decyzję a wartością jakości jest suma kar przyznanych klasyfikatorowi za podjęcie błędnych decyzji [33]. Wymienione wyżej agregacje \mathcal{A}_{pi} oraz \mathcal{A}_{nu} uzyskały bardzo dobre rezultaty - porównywalne z najbardziej optymalnymi agregacjami wyodrębnionymi w module OEA. W szczególności, nec-agregacja \mathcal{A}_{nu} uzyskała niskie wartości funkcji kosztu, jednak ze względu na możliwości obliczeniowe sprzętu, z którego korzystałam, eksperymenty były przeprowadzone z mniejszą liczbą powtórzeń niż oryginalnie w OEA, co mogło skutkować mniejszą stabilnością uzyskanych wyników.

Podsumowując, osiągnięcia stanowiące wkład w rozwój dziedziny informatyka, wchodzące w skład wyżej wymienionego osiągnięcia naukowego to:

- wprowadzenie nowych klas agregacji dla rachunku przedziałowego służącego do reprezentacji danych nieprecyzyjnych, niekompletnych;
- podanie licznych przykładów nowych klas agregacji, metod konstrukcji, opis własności, podanie zależności ze zdefiniowanymi wcześniej klasami agregacji;
- wskazanie konkretnych obszarów zastosowań dla nowych klas agregacji:
 - wielokryterialne podejmowanie decyzji;
 - komputerowy system wspomaganie decyzji OvaExpert;
- podanie nowatorskich algorytmów klasyfikujących, stosujących modelowanie matematyczne w rachunku przedziałowym:
 - optymalizacja działania algorytmu k - NN w sytuacji dużej liczby brakujących danych w zbiorze obiektów testowych;
 - optymalizacja działania algorytmu k - NN dla mikromacierzy DNA.

Dalsze moje badania będą ukierunkowane na poszukiwanie kolejnych obszarów zastosowań dla rachunku przedziałowego do reprezentacji danych niekompletnych bądź też nieprecyzyjnych. W szczególności planuję kontynuację badań dotyczących teorii i zastosowań agregacji przedziałowych. Chciałabym przeprowadzić szersze prace badawcze nad agregacjami zdefiniowanymi względem porządków liniowych.

5 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

Następujące rezultaty stanowią pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze, uzyskane po doktoracie, nie wchodzące w skład wyżej wymienionego osiągnięcia.

1. Wprowadzenie nowych typów własności dla relacji rozmytych.
2. Charakteryzacja agregacji zachowujących różne własności relacji rozmytych.
3. Zbadanie własności pewnej relacji równoważności w zbiorze relacji.
4. Uogólnienie algorytmu *non-dominance* dla rozmytego rachunku przedziałowego.
5. Uogólnienie pojęcia *reciprocity* z użyciem negacji rozmytej.
6. Uogólnienie pojęcia agregacji OWA.
7. Zbadanie klas granicznych funkcji *MN*-wypukłych.
8. Wprowadzenie nowych spójników rozmytych.

5.1 Wprowadzenie nowych typów własności dla relacji rozmytych

Relacje rozpatrywane na gruncie teorii zbiorów rozmytych dają możliwość rozważania wielu typów danej własności znanej z rachunku zwykłych zbiorów. Różne typy danej własności są wprowadzane ze względu na zastosowania, gdyż przykładowo w zagadnieniach wielokryterialnego podejmowania decyzji umożliwiają one bardziej efektywną interpretację relacji preferencji.

Jako rezultat moich badań wprowadziłam pojęcie α -przechodności [30], gdzie $\alpha \in [0, 1]$. Mianowicie, relacja rozmyta R w zbiorze X jest α -przechodnia, gdy dla każdych $x, y, z \in X$ zachodzi warunek $\min(R(x, y), R(y, z)) \geq 1 - \alpha \Rightarrow R(x, z) \geq \min(R(x, y), R(y, z))$. Pozostałe własności zależne od parametru α zostały wprowadzone wcześniej w [27]. Własności te mają związki z warstwami relacji rozmytej (większość z α -własności jest charakteryzowana przez odpowiednią własność warstw) i ze względu na zastosowania są to łatwiej osiągalne w praktyce zależności niż te, które zostały wprowadzone w pierwszych pracach dotyczących relacji rozmytych [56]. Można powiedzieć, że są to własności spełnione w stopniu $\alpha \in [0, 1]$.

Szczególnym przypadkiem α -przechodniości jest 0.5-przechodniość znana jako jeden z typów *przechodniości stochastycznej* [35] (0.5-przechodniość znana jest też pod nazwą *umiarkowanej przechodniości* [49]).

Ponadto, wprowadziłam też tak zwane *własności lokalne* [32] (por. [25]) dla bipolarnych relacji rozmytych, zdefiniowane przy pomocy pojęcia supremum i infimum. Relacje bipolarne to pary relacji rozmytych prezentujących stopień przynależności i nieprzynależności elementu do zbioru. Własności lokalne zostały wprowadzone jako te, które gwarantują stabilność własności względem pewnej relacji równoważności rozpatrywanej w rodzinie relacji bipolarnych.

Zaproponowałam też własności dla relacji rozmytych zależne od dowolnego działania binarnego B (por. [4]), dla których dalsze zależności podałam w pracy [10]. Własności te stanowią uogólnienie rozpatrywanych wcześniej zależności, określonych przy pomocy norm i konorm trójkątnych [36]. Podane uogólnienia pozwalają na użycie w definicjach odpowiednich własności dowolnych koniunkcji i dysjunkcji rozmytych, których szczególne przypadki to odpowiednio normy i konormy trójkątne. Jest to istotne uogólnienie i bardziej dostosowane do danych uzyskiwanych w praktyce, gdyż nie jest wymagane, aby działanie B było łączne i przemienne.

5.2 Charakteryzacja agregacji zachowujących różne własności relacji rozmytych

W zagadnieniach wielokryterialnego bądź też wieloagentowego podejmowania decyzji zachodzi potrzeba agregowania otrzymanych na bazie opinii ekspertów relacji preferencji. Otrzymane relacje rozmyte są agregowane w celu uzyskania finalnej relacji, na podstawie której dokonywane jest porządkowanie alternatyw. Istotne jest, aby finalna relacja, po procesie agregacji, zachowywała własności relacji wejściowych, czyli posiadała te same własności, co relacje wejściowe. Dlatego przeprowadziłam badania dotyczące zachowywania własności relacji rozmytych przez agregacje, gdyż taka informacja o funkcjach agregacji ułatwia wybór optymalnej agregacji w konkretnych zastosowaniach. W przypadku większości rozpatrywanych przeze mnie własności uzyskałam charakteryzacje takich agregacji. W pracy [26] przedstawiłam wyniki dotyczące zachowywania przez agregacje różnego rodzaju porządków, zajęłam się też relacją turniejową, relacją tolerancji i relacją równoważności. W pracy [10] zbadałam zachowywanie przez agregacje różnego rodzaju porządków zdefiniowanych dla uogólnionych wersji własności zależnych od działania binarnego B (por. [4]). Dodatkowo, w pracy [14] zaprezentowałam wyniki dotyczące zagadnienia odwrotnego do zachowywania własności. Przedstawione badania dotyczyły problemu odzyskiwania informacji o relacjach wejściowych, gdy znane są własności relacji wyjściowej po agregacji. Podsumowanie badań nad zachowywaniem przez agregacje tzw. *słabych własności* przedstawiłam w pracy [31]. Zachowywanie przez agregacje własności zdefiniowanych względem parametru $\alpha \in [0, 1]$ opisałam w pracach [5, 31].

5.3 Zbadanie własności pewnej relacji równoważności w zbiorze relacji

W swoich badaniach zajmowałam się też następującą relacją równoważności określoną oryginalnie na gruncie zbiorów rozmytych [45]. Niech $R, S : X \times X \rightarrow [0, 1]$ będą relacjami rozmytymi. Relacje rozmyte R i S są równoważne ($R \sim S$, por. [25]), gdy dla dowolnych $x, y, u, v \in X$ zachodzi

$$R(x, y) \leq R(u, v) \Leftrightarrow S(x, y) \leq S(u, v).$$

W pracy [32] uogólniłam pojęcie równoważności na przypadek intuicjonistycznych relacji rozmytych (nazywanych także relacjami bipolarnymi). Zbadałam własności tej relacji oraz podałam warunek wystarczający i konieczny na równoważność dwóch relacji bipolarnych. Dodatkowo, wprowadziłam nowy typ własności dla bipolarnych relacji rozmytych nazywanych własnościami lokalnymi. Klasa abstrakcji wyznaczona przez daną relację bipolarną składa się z relacji posiadających ten sam zestaw własności lokalnych. Jest to ciekawa własność, która umożliwia klasyfikację informacji, którą niosą ze sobą relacje.

Ponadto, w pracy [9] zastosowałam relację równoważności \sim w rozmytym rachunku przedziałowym w kontekście relacji porządku częściowego oraz porządków liniowych między przedziałami. Podałam metodę wyznaczania równoważnych sobie porządków liniowych skonstruowanych przy pomocy agregacji, co jest przydatne w algorytmach wielokryterialnego podejmowania decyzji.

5.4 Uogólnienie algorytmu *non-dominance* dla rozmytego rachunku przedziałowego

Algorytm najmniej zdominowanej alternatywy (ang. *non-dominance*, [46]) jest jedną z ważnych metod wyboru alternatywy w zagadnieniach wielokryterialnego podejmowania decyzji. W pracy [2] przedstawiłam uogólnienie tego algorytmu dla rozmytego rachunku przedziałowego, w którym zostały wykorzystane porządki liniowe. Dodatkowo w wyżej wymienionej pracy zostało zaproponowane użycie operatorów zwiężających przedziały do budowania porządków liniowych [17]. Mianowicie, został zastosowany następujący operator (por. [15]) $F_{\alpha, \beta}([a, b]) = [a + \alpha(b - a), b - \beta(b - a)]$, $F_{\alpha, \beta} : L^I \rightarrow L^I$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha + \beta \leq 1$, który dla dowolnej przedziałowej relacji rozmytej $R \in \mathcal{IVFR}(X)$, $R = [\underline{R}, \overline{R}]$, dla dowolnych $x, y \in X$, spełnia warunek $\underline{R}(x, y) \leq F_{\alpha, \beta}(\underline{R})(x, y) \leq \overline{F_{\alpha, \beta}(\underline{R})}(x, y) \leq \overline{R}(x, y)$. Własność ta oznacza, że operator $F_{\alpha, \beta}(\underline{R})$ zastosowany do R zmniejsza szerokość przedziału a zatem zmniejsza niepewność, którą reprezentuje przedział. Poza tym, w pracy [2] dokonałam analizy tych sytuacji, w których stosowne jest użycie rozmytego rachunku przedziałowego w zagadnieniach wielokryterialnego podejmowania decyzji.

5.5 Uogólnienie pojęcia *reciprocity* z użyciem negacji rozmytej

Własność wzajemności (ang. *reciprocity*) dla rozmytych relacji przedziałowych została klasycznie zdefiniowana przy użyciu tzw. negacji standardowej $N(x) = 1 - x$ (por. [54]). W pracy [7] uogólniłam pojęcie *reciprocity* dzięki wprowadzeniu do jej definicji dowolnej negacji rozmytej N (N -*reciprocity*), co lepiej odzwierciedla uzyskiwane w praktyce dane dla relacji preferencji. Ponadto, w pracy [7] rozważałam relacje preferencji w kontekście relacji ścisłej preferencji, nierozróżnialności i nieporównywalności, które zostały zdefiniowane przy użyciu przedziałowej negacji rozmytej i agregacji przedziałowych. Przedstawiłam też wyniki dotyczące zachowywania własności N -*reciprocity* przez agregacje przedziałowe a także przez inne operacje dotyczące relacji. Dodatkowo, przeprowadziłam analizę zależności pomiędzy przedziałowymi relacjami rozmytymi posiadającymi własność N -*reciprocity* a przechodnością tych relacji. Dla rozmytego rachunku przedziałowego zaproponowałam algorytm wyboru najlepszej alternatywy z użyciem pojęcia N -*reciprocity* i uogólnionej metody głosowania (ang. *voting method*).

5.6 Uogólnienie pojęcia agregacji OWA

Pojęcie uporządkowanej średniej wagowej OWA jest użyteczne w wielu zastosowaniach. Dlatego też ta agregacja została uogólniona na gruncie różnych rozszerzeń zbiorów rozmytych. W pracy [22] wprowadziłam definicję agregacji OWA w obszarze przedziałowo-intuicjonistycznych zbiorów rozmytych z dwoma zestawami wag, oddzielnie dla wartości przynależności wyrażonych przedziałami i wartości nieprzynależności również wyrażonych przedziałami. Dodatkowo do zdefiniowania tejże agregacji zostały zastosowane porządki liniowe, wprowadzone w pracy [21]. Tak określona agregacja może być użyteczna w obszarze problemów wielokryterialnego podejmowania decyzji, gdy eksperci mają trudność z podaniem konkretnych wartości liczbowych dla zaprezentowania swoich preferencji pomiędzy alternatywami. Eksperti mogą bowiem używać przedziałów niepewności do wyrażania swoich opinii. Dlatego w pracy [22] zostały podane dwa algorytmy dotyczące zagadnień wieloagentowego podejmowania decyzji. Została też wprowadzona definicja dyskretnej całki Choquet'a na gruncie przedziałowo-intuicjonistycznych zbiorów rozmytych, która stanowi uogólnienie pojęcia operatora OWA.

5.7 Zbadanie klas granicznych funkcji MN -wypukłych

W pracy [6] pojęcie wypukłości i wklęsłości funkcji rozważałam w postaci uogólnionej z zastosowaniem dowolnych agregacji M i N . Niech $D \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym przedziałem, $M, N : D^2 \rightarrow D$ będą agregacjami (M jest agregacją, gdy jest rosnąca w przedziale D oraz spełnia warunki graniczne $\inf_{x,y \in D} M(x,y) = \inf D$,

$\sup_{x,y \in D} M(x,y) = \sup D$). Funkcja $f : D \rightarrow D$ jest funkcją MN -wypukłą ($f \in C(M,N)$), gdy $f(M(x,y)) \leq N(f(x), f(y))$, $x, y \in D$. Funkcja $f : D \rightarrow D$ jest funkcją MN -wkłesłą ($f \in C^*(M,N)$), gdy $f(M(x,y)) \geq N(f(x), f(y))$, $x, y \in D$.

Podalam warunek konieczny i wystarczajacy na to, by $C(M,N) = ALL$ oraz $C^*(M,N) = ALL$, czyli podalam warunki dla M i N , by zbior funkcji MN -wypuklych lub odpowiednio MN -wkleslych skladal sie ze zbioru wszystkich funkcji $f : D \rightarrow D$. Podalam takze czesciowa charakteryzacje (dla przedzialow ograniczonych typu $[a,b]$) par agregacji M, N takich, ze rodzina funkcji MN -wypuklych jest postaci $C(M,N) = CONST$ (czyli stanowi zbior wszystkich funkcji stalych $f : D \rightarrow D$). Ponadto, przedstawilam zaleznosci miedzy rodzinami funkcji MN -wypuklych (MN -wkleslych). Czesciowe wyniki wyzej wymienionych rezultatow zaprezentowalam na konferencji AGOP 2015 (por. [3]).

Uzyskane wyniki dla klas granicznych funkcji MN -wypuklych i MN -wkleslych maja zastosowanie w komputerowych systemach informacji geograficznej do opisu obszarow (ang. Geographic Information System, GIS, por. [6, 40]).

5.8 Wprowadzenie nowych spójników rozmytych

Spójniki rozmyte stanowią ważny aspekt teorii i zastosowań zbiorów rozmytych oraz ich uogólnień. W swoich badaniach wykorzystywałam różne spójniki rozmyte takie jak negacja, koniunkcja, dysjunkcja, równoważność. Zauważyłam, że w rodzinie równoważności rozmytych można uwzględnić nowe typy tych spójników (por. [12]), które poszerzają możliwości badania równoważności różnych obiektów. Wprowadziłam trzy nowe typy równoważności rozmytych, podałam liczne przykłady nowych spójników, zbadałam zależności pomiędzy nowymi klasami oraz klasycznie stosowanymi spójnikami a także wskazałam metody generowania tych klas spójników (por. [12, 13]). Wprowadzone spójniki rozmyte mają potencjalne zastosowania w zagadnieniach dotyczących przetwarzania obrazów (por. [16]), nad czym planuję pracować we współpracy z grupą naukową profesora Humberto Bustince z Public University of Navarra z Pampeluny, z którą od kilku lat prowadzę badania naukowe dotyczące teorii i zastosowań zbiorów rozmytych oraz ich uogólnień.

Literatura

- [1] Beliakov, G., Bustince, H., Calvo, T.: A Practical Guide to Averaging Functions. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer International Publishing, Switzerland (2016)
- [2] Bentkowska, U., Bustince, H., Jurio, A., Pagola, M., Pękala, B.: Decision making with an interval-valued fuzzy preference relation and admissible orders. Applied Soft Computing **35**, 792–801 (2015)

- [3] Bentkowska, U., Drewniak, J.: Convexity with respect to aggregations. W: Baczyński, M. i in. (red.), Proceedings of AGOP 2015, AGOP Conference, 7-10 July, Katowice, 61–65. Katowice, University of Silesia (2015)
- [4] Bentkowska, U., Król, A.: Preservation of fuzzy relation properties based on fuzzy conjunctions and disjunctions during aggregation process. *Fuzzy Sets and Systems* **291**, 98–113 (2016)
- [5] Bentkowska, U., Balicki, K.: Comparison of algorithms for decision making problems and preservation of alpha-properties of fuzzy relations in aggregation process. *Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems* **10** (2), 25–39 (2016)
- [6] Bentkowska, U., Díaz, S., Drewniak, J., Janiš, V., Montes, S.: Properties of extremal families of MN-convex (MN-concave) functions. *Fuzzy Sets and Systems* **325**, 47–57 (2017)
- [7] Bentkowska, U., Pękala, B., Bustince, H., Fernandez, J., Jurio, A., Balicki, K.: N-reciprocity property for interval-valued fuzzy relations with an application to group decision making problems in social networks. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **25** (Suppl. 1), 43–72 (2017)
- [8] Bentkowska, U.: B-properties of fuzzy relations in aggregation process - the "converse problem". W: Acampora, G. i in. (red.), Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) 2017, Naples, 9-12.07.2017, 6 pages, DOI: 10.1109/FUZZ-IEEE.2017.8015574 (2017)
- [9] Bentkowska, U., Pękala, B.: An equivalence relation and admissible linear orders in decision making. W: Kacprzyk, J. i in. (red.), Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. IWIFSGN 2017, EUSFLAT 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 641, 187–198. Springer, Cham (2018)
- [10] Bentkowska, U.: Aggregation of diverse types of fuzzy orders for decision making problems. *Information Sciences* **424**, 317–336 (2018)
- [11] Bentkowska, U.: New types of aggregation functions for interval-valued fuzzy setting and preservation of pos-B and nec-B-transitivity in decision making problems. *Information Sciences* **424**, 385–399 (2018)
- [12] Bentkowska, U., Król, A.: Fuzzy α - C -equivalences, *Fuzzy Sets and Systems* (2018) <https://doi.org/10.1016/j.fss.2018.01.004>
- [13] Bentkowska, U., Król, A.: Dependencies between some types of fuzzy equivalences. W: Medina, J. i in. (red.), IPMU 2018, 661–672. CCIS 853 Springer International Publishing AG 2018, part of Springer Nature (2018)

- [14] Bentkowska, U.: Properties of fuzzy relations and aggregation process in decision making. *Iranian Journal of Fuzzy Systems (zaakceptowana do druku)*.
- [15] Bustince, H., Burillo, P.: Perturbation of intuitionistic fuzzy relations. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **9**, 81–103 (2001)
- [16] Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M.: Image thresholding using restricted equivalence functions and maximizing the measures of similarity. *Fuzzy Sets Syst.* **158**, 496–516 (2007)
- [17] Bustince, H., Fernandez, J., Kolesárová, A., Mesiar, R.: Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions, *Fuzzy Sets and Systems* **220**, 69–77 (2013)
- [18] Calvo, T., Kolesárová, A., Komorniková, M., Mesiar, R.: Aggregation operators: properties, classes and construction methods. W: Calvo, T. i in. (red.) *Aggregation Operators*, 3–104. Physica-Verlag, Heidelberg (2002)
- [19] Deegalla, S., Boström, H.: Reducing high-dimensional data by principal component analysis vs. random projection for nearest neighbor classification. In: *ICMLA 2006. Proceedings of the 5th International Conference on Machine Learning and Applications*, 245–250. IEEE Computer Society, Washington, DC, USA (2006)
- [20] Deegalla, S., Boström, H.: Classification of Microarrays with kNN: Comparison of Dimensionality Reduction Methods. W: Yin, H. i in. (red.) *IDEAL 2007, LNCS 4881*, 800–809, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007)
- [21] De Miguel, L. D., Bustince, H., Fernandez, J., Induráin, E., Kolesárová, A., Mesiar, R.: Construction of admissible linear orders for interval-valued Atanassov intuitionistic fuzzy sets with an application to decision making. *Inf. Fusion* **27**, 189–197 (2016)
- [22] De Miguel, L., Bustince, H., Pečala, B., Bentkowska, U., Da Silva, I., Bedregal, B., Mesiar, R., Ochoa, G.: Interval-valued Atanassov intuitionistic OWA aggregations using admissible linear orders and their application to decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **24** (6), 1586–1597 (2016)
- [23] Deschrijver, G.: Arithmetic operators in interval-valued fuzzy set theory. *Inf. Sci.* **177**, 2906–2924 (2007)
- [24] FuzzyDataMiner 1.0: <http://diagres.ur.edu.pl/~fuzzydataminer/>

- [25] Drewniak, J., Dudziak, U.: Local properties of fuzzy relations. W: Hryniewicz, O. i in. (red.), *Issues in Soft Computing. Decisions and Operations Research*, 161–170. EXIT, Warszawa (2005)
- [26] Drewniak, J., Dudziak, U.: Preservation of properties of fuzzy relations during aggregation processes. *Kybernetika* **43** (2), 115–132 (2007)
- [27] Drewniak, J.: *Fuzzy Relation Calculus*. Silesian University, Katowice (1989)
- [28] Drygaś, P., Pękala, B.: Properties of Decomposable Operations on some Extension of the Fuzzy Set Theory. W: Atanassov, K.T. i in. (red.), *Advances in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Related Topics*, 105–118. EXIT, Warsaw (2008)
- [29] Dubois, D., Prade, H.: Gradualness, uncertainty and bipolarity: Making sense of fuzzy sets. *Fuzzy Sets Syst.* **192**, 3–24 (2012)
- [30] Dudziak, U.: Graded transitivity and aggregation processes. *Sci. Bull. Chełm, Sect. Math. Comput. Sci.* **1**, 31–39 (2007)
- [31] Dudziak, U.: Weak and graded properties of fuzzy relations in the context of aggregation process. *Fuzzy Sets and Systems* **161**, 216–233 (2010)
- [32] Dudziak, U., Pękala, B.: Equivalent bipolar fuzzy relations. *Fuzzy Sets and Systems* **161**, 234–253 (2010)
- [33] Dyczkowski, K.: *Intelligent Medical Decision Support System Based on Imperfect Information. The Case of Ovarian Tumor Diagnosis. Studies in Computational Intelligence*, Springer (2018)
- [34] Fawcett, T.: An introduction to ROC analysis. *Pattern Recognition Letters* **27** (8), 861–874 (2006)
- [35] Fishburn, P.C.: Binary choice probabilities: on the varieties of stochastic transitivity. *J. Math. Psych.* **10**, 327–352 (1973)
- [36] Fodor, J., Roubens, M.: *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1994)
- [37] Frank, E., Hall, M. A., Witten, I. H.: *The WEKA Workbench. Online Appendix for Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques*. Morgan Kaufmann, Fourth Edition (2016)
- [38] OvaExpert: <http://ovaexpert.github.io/ovarian-tumor-aggregation>
- [39] Goguen, A.: L-Fuzzy Sets. *J. Math. Anal. Appl.* **18**, 145–174 (1967)

- [40] Huisman, O., De By, R.A.: Principles of Geographic Information Systems. ITC, Enschede, The Netherlands (2009)
- [41] Japkowicz, N., Shah, M.: Evaluating Learning Algorithms: A Classification Perspective. Cambridge University Press, New York (2011)
- [42] Komorníková, M., Mesiar, R.: Aggregation functions on bounded partially ordered sets and their classification, *Fuzzy Sets Syst.* **175**, 48–56 (2011)
- [43] Michie, D., Spiegelhalter, D. J., Taylor, D. J.: Machine learning, Neural and Statistical Classification. Ellis Horwood Limited, England (1994)
- [44] Moore, R.E.: Interval Analysis. vol. 4, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1966)
- [45] Murali, V., Makamba, B. B.: On an equivalence of fuzzy subgroups I. *Fuzzy Sets and Systems* **123**, 259–264 (2001)
- [46] Orlovsky, S. A.: Decision-making with a fuzzy preference relation. *Fuzzy Sets Syst.* **1** (3), 155–167 (1978)
- [47] Pawlak, Z., Skowron, A.: Rudiments of rough sets. *Information Sciences* **177**, 3–27 (2007)
- [48] Pękala, B., Bentkowska, U., De Baets, B.: On comparability relations in the class of interval-valued fuzzy relations. *Tatra Mountains Mathematical Publications* **66**, 91–101 (2016)
- [49] Peneva, V., Popchev, I.: Aggregation of fuzzy relations. *C. R. Acad. Bulgare Sci.* **51** (9–10), 41–44 (1998)
- [50] Singh, D. i in.: Gene Expression Correlates of Clinical Prostate Cancer Behavior. *Cancer Cell* **1**, 203–209 (2002)
- [51] Stępniaak, P., Handschuh, L., Figlerowicz, M.: DNA microarray data anlysis. *Biotechnologia* **4** (83), 68–87 (2008)
- [52] Wojna A.: Analogy-Based Reasoning in Classifier Construction. W: Peters, J.F., Skowron, A. (red.) *Transactions on Rough Sets IV. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3700, 277–374. Springer, Berlin, Heidelberg (2005)
- [53] Wójtowicz, A., Żywica, P., Stachowiak, A., Dyczkowski, K.: Solving the problem of incomplete data in medical diagnosis via interval modeling. *Applied Soft Computing* **47**, 424–437 (2016)
- [54] Xu, Z.: On compatibility of interval fuzzy preference relations. *Fuzzy Optim. Dec. Making* **3**, 217–225 (2004)

- [55] Zadeh, L.A.: Fuzzy sets. Inform. Control **8**, 338–353 (1965)
- [56] Zadeh, L.A.: Similarity relations and fuzzy orderings. Inform. Sci. **3**, 177–200 (1971)
- [57] Zadeh, L.A.: The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I. Information Sciences **8**, 199–249 (1975)
- [58] Zapata, H., Bustince, H., Montes, S., Bedregal, B., Dimuro, G.P., Takáč, Z., Baczyński, M., Fernandez, J.: Interval-valued implications and interval-valued strong equality index with admissible orders. Internat. J. Approx. Reason. **88**, 91–109 (2017)

Ursula Bentkowska

