

Lublin, 07.10.2018

(Załącznik 2a)

dr Edward Kozłowski
Katedra Metod Ilościowych w Zarządzaniu
Wydział Zarządzania
Politechnika Lubelska
Nadbystrzycka 38, 20-618 Lublin

AUTOREFERAT

przedstawiający opis podstawowego osiągnięcia i pozostałego dorobku naukowego
w związku z ubieganiem się o nadanie stopnia doktora habilitowanego

1 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

2002 Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk. Uzyskanie stopnia doktora nauk technicznych w dyscyplinie Automatyka i Robotyka

- obrona rozprawy doktorskiej: 28 listopada 2002 r.
- nadanie stopnia doktora nauk technicznych przez Radę Naukową Instytutu Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk: 19 luty 2003 r.
- tytuł rozprawy: *Optymalizacja portfela inwestycyjnego z uwzględnieniem kosztu informacji.*

1996 Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie, Wydział Matematyki i Fizyki. Uzyskanie tytułu magistra

- obrona pracy magisterskiej: 9 lipca 1996 r.
- kierunek studiów: matematyka
- tytuł pracy magisterskiej: *Prawie pewna wersja centralnego twierdzenia granicznego.*

2 Zatrudnienie w jednostkach naukowych

- 01.09.1996 – Politechnika Lubelska, Wydział Zarządzania i Podstaw Techniki,
30.04.2002 Katedra Badań Operacyjnych, stanowisko: *asystent*
- 01.05.2002 – Politechnika Lubelska, Wydział Zarządzania i Podstaw Techniki,
30.04.2003 Katedra Organizacji Przedsiębiorstwa, stanowisko: *asystent*
- 01.05.2003 – Politechnika Lubelska, Wydział Zarządzania i Podstaw Techniki,
30.11.2003 Katedra Organizacji Przedsiębiorstwa, stanowisko: *adiunkt*
- 01.12.2003 – Politechnika Lubelska, Wydział Zarządzania i Podstaw Techniki,
27.12.2007 Katedra Metod Ilościowych w Zarządzaniu, stanowisko: *adiunkt*
- 28.12.2007 – Politechnika Lubelska, Wydział Zarządzania,
Katedra Metod Ilościowych w Zarządzaniu, stanowisko: *adiunkt*

3 Podstawowe osiągnięcie naukowe

Jako osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki wskazuję jednotematyczny cykl publikacji pod tytułem:

Optymalne sterowanie dyskretnymi systemami stochastycznymi

3.1 Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia

Wybrane publikacje wchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji:

- [O1] Kozłowski E.(100%), *Optymalne sterowanie dyskretnymi systemami stochastycznymi*, Politechnika Lubelska, Lublin 2018, ISBN: 978-83-7947-316-8;

MNiSW: 25p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 100%. Obejmował on wszystkie etapy powstania monografii, w szczególności: a) opracowanie koncepcji i układu pracy; b) omówienie problematyki optymalnego sterowania dyskretnymi systemami stochastycznymi oraz sposoby rozwiązywania zadań; c) projektowanie i implementacja algorytmów wyznaczenia optymalnych sterowań oraz wyprowadzenie wyników; d) analizę i interpretację wyników; e) przygotowanie publikacji do druku.

- [O2] Banek T.(30%), Kozłowski E.(70%), *Adaptive control of system entropy*, "Control and Cybernetics", 2006 vol. 35(2), p. 279–289; IF: 0.202; MNiSW: 15p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 70%. Obejmował on wszystkie etapy powstania pracy, w szczególności: a) omówienie problematyki oraz sformułowanie celu badań - 60%; b) opracowanie koncepcji i układu pracy - 70%; c) projektowanie algorytmu - 80%; d) analizę i interpretację wyników - 70%; e) przygotowanie publikacji do druku - 70%.

- [O3] Banek T.(40%), Kozłowski E.(60%), *Active and passive learning in control processes application of the entropy concept*, "Systems Science", 2005 vol. 31(2), p. 29–44; MNiSW: 6p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 60%. Obejmował on wszystkie etapy powstania pracy, w szczególności: a) omówienie problematyki oraz sformułowanie celu badań - 50%; b) opracowanie koncepcji i układu pracy - 50%; c) projektowanie algorytmów - 80%; d) analizę i interpretację wyników - 60%; e) przygotowanie publikacji do druku - 60%.

- [O4] Banek T.(30%), Kozłowski E.(70%), *Active learning in discrete time stochastic systems*, [In:] *Knowledge-Based Intelligent System Advancements: Systemic and Cybernetic Approaches*, ed. by Jozefczyk J., Orski D., Information Science References, New York 2011, p. 350–371; MNiSW: 5p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 70%. Obejmował on wszystkie etapy powstania pracy, w szczególności: a) omówienie problematyki oraz sformułowanie celu badań - 60%; b) opracowanie koncepcji i układu pracy - 70%; c) projektowanie algorytmu - 80%; d) analizę i interpretację wyników - 70%; e) przygotowanie publikacji do druku - 70%.

- [O5] Kozłowski E.(100%), *Stabilization of linear system in random horizon via control*, "Control and Cybernetics", 2013 vol. 42(2), p. 527–541; MNiSW: 10p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 100%. Obejmował on wszystkie

etapy powstania pracy, w szczególności: a) opracowanie koncepcji i układu pracy; b) omówienie problematyki stabilizacji systemów stochastycznych poprzez sterowanie oraz sposoby rozwiązywania zadań; c) projektowanie i implementacja algorytmu wyznaczenia optymalnych sterowań; d) analizę i interpretację wyników; e) przygotowanie publikacji do druku.

- [O6] Kozłowski E.(100%), *Optimal route determining for LQ problem with optimally stopped horizon*, [In:] *Proceedings of 20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2015*, Międzyzdroje, 24-27 August 2015, p. 553–557; MNiSW: 15p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 100%. Obejmował on wszystkie etapy powstania pracy, w szczególności: a) opracowanie koncepcji i układu pracy; b) omówienie problematyki optymalnego sterowania dyskretnymi systemami stochastycznymi oraz postawienie zadania zastępczego; c) projektowanie i implementacja algorytmów wyznaczenia optymalnej trajektorii oraz wyprowadzenie wyników; d) analizę i interpretację wyników; e) przygotowanie publikacji do druku.

- [O7] Kozłowski E.(100%), *Optimal stopping of controlled linear stochastic systems*, [In:] *Proceedings of 21th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2016*, Międzyzdroje, 29 Aug.-1 Sept. 2016, p. 272–277; MNiSW: 15p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 100%. Obejmował on wszystkie etapy powstania pracy, w szczególności: a) opracowanie koncepcji i układu pracy; b) omówienie problematyki optymalnego zatrzymania systemów stochastycznych oraz sposoby rozwiązywania zadania; c) projektowanie i implementacja algorytmów wyznaczenia optymalnych sterowań oraz momentu zatrzymania; d) analizę i interpretację wyników; e) przygotowanie publikacji do druku.

- [O8] Kozłowski E.(100%), *Optimal stopping areas for discrete time linear quadratic control problem*, [In:] *Proceedings of 22th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2017*, Międzyzdroje, 28-31 August 2017, p. 503–507; MNiSW: 15p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 100%. Obejmował on wszystkie etapy powstania pracy, w szczególności: a) opracowanie koncepcji i układu pracy; b) omówienie problematyki optymalnego zatrzymania sterowanych systemów stochastycznych oraz sposoby rozwiązywania zadań; c) projektowanie i implementacja algorytmów wyznaczenia zbiorów optymalnego zatrzymania; d) analizę i interpretację wyników; e) przygotowanie publikacji do druku.

3.2 Cel naukowy

Teoria sterowania jest to nauka o zasadach i metodach sterowania systemami (obiektami, urządzeniami, procesami). Zadania z teorii sterowania polegają na analizie i modelowaniu matematycznym systemów oraz wyznaczeniu sterowań dla realizacji określonego celu. W wielu przypadkach na zachowanie systemów wpływają czynniki losowe. Powodują one niemożliwość dokładnego przewidywania reakcji systemu na działania sterujące.

Niech (Ω, \mathcal{F}, P) będzie zupełną przestrzenią probabilistyczną, $U \subset \mathbb{R}^l$ (lub $U \subset \mathbb{C}^l$), $l \in \mathbb{N}$ będzie zbiorem dopuszczalnych sterowań, natomiast $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ (lub $\mathcal{Y} \subset \mathbb{C}^n$), $n \in \mathbb{N}$ – przestrzenią stanów (sygnałów wyjściowych).

Definicja 3.1 *Sterowany system stochastyczny jest to system, w którym sygnałowi wejściowemu $u \in U$ odpowiada wektor losowy $y : \Omega \times U \rightarrow \mathcal{Y}$ o rozkładzie prawdopodobieństwa P_y w przestrzeni mierzalnej sygnałów wyjściowych $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$.*

Definicja 3.2 *Dyskretnym sterowanym systemem stochastycznym nazywamy proces stochastyczny $\{y_t\}_{t \in T}$ z czasem dyskretnym, gdzie $y_t \stackrel{def}{=} f(t, u_{t-s}, \omega)$ dla każdego momentu decyzyjnego $t \in T$, natomiast $s \in \mathbb{R}_+$ oznacza czas odpowiedzi systemu na sygnał wejściowy u_{t-s} .*

Ciąg sterowań $\{u_t\}_{t \in T}$ nazywamy regulatorem. Przy ustalonym $\omega \in \Omega$ oraz ustalonym regulatorze $\{u_t\}_{t \in T}$ ciąg wektorów $\{y_t(\omega)\}_{t \in T}$ o wartościach w przestrzeni stanów nazywamy realizacją (trajektorią) systemu stochastycznego. W wielu przypadkach zakłada się, że odstępy pomiędzy momentami, w których obserwujemy system, są jednakowe $t_{i+1} - t_i = s > 0$ dla $i \in \mathbb{N}_0$ (stany systemu są obserwowane w momentach $0, s, 2s, 3s, \dots$). Dla uproszczenia przyjmujemy $s = 1$. Jako zbiór momentów decyzyjnych przyjmujemy $T = \mathbb{N}_0$ lub $T = \{0, 1, \dots, N\} \subset \mathbb{N}_0$.

Głównym celem teorii sterowania jest wyznaczenie regulatora $\{u_t\}_{t \in T}$, który spełnia określone własności. W teorii optymalnego sterowania zadanie polega na wyznaczeniu ciągu sterowań $\{u_t^*\}_{t \in T}$, dla którego wskaźnik jakości osiąga wartość najmniejszą (lub największą). Wskaźnik jakości $J(\{y_t\}_{t \in T}, \{u_t\}_{t \in T})$ w wielu przypadkach zależy od stanów systemu i sterowań. Odpowiednie modelowanie systemów

stochastycznych oraz optymalne sterowanie nimi jest dużym wyzwaniem dla naukowców, analityków, inżynierów.

Zachowanie każdego systemu, którym sterujemy, zależy również od parametrów. Sterując systemem stochastycznym, nie zawsze posiadamy informację o wartościach tych parametrów. Jeżeli parametry są znane sterującemu, to mamy do czynienia z kompletną informacją o systemie. Jeżeli parametry systemu nie są znane, to w trakcie realizacji głównego celu sterowania dodatkowo należy wzbogacić wiedzę o funkcjonowaniu systemu. Gromadzenie wiedzy o parametrach umożliwia dokładniejsze sterowanie systemem. Zgodnie z powyższym sterowanie systemem stochastycznym z nieznanymi parametrami ma podwójne zadanie: z jednej strony działanie systemu polega na gromadzeniu wiedzy o parametrach, z drugiej zaś na optymalnej realizacji celu.

Definicja 3.3 *Sterowanie adaptacyjne jest to metoda sterowania systemami z nieznanymi parametrami lub parametrami zmieniającymi się w czasie, podczas którego te parametry są identyfikowane (dopasowywane, dostrajane) poprzez regulator.*

W przypadku sterowania adaptacyjnego stosuje się metodę adaptacji, która bazuje na dostrajaniu regulatora w pętli oraz idei działania w celu samouczenia. Identyfikacja parametrów jest dokonywana poprzez sterowanie systemem podczas realizacji głównego celu. Optymalne sterowanie systemem musi mieć dualną naturę: z jednej strony powinno odpowiednio szybko umożliwiać gromadzenie wiedzy o parametrach, z drugiej zaś zagwarantować realizację celu. Ze względu na ogromne potencjalne znaczenie dla zastosowań praktycznych problem sterowania adaptacyjnego przyciągał od dawna uwagę badaczy. Pierwsze publikacje pojawiły się ponad pół wieku temu i są znaczone takimi nazwiskami, jak Wiener N., Astrom K., Feldbaum A.A., Bellman R., Kulikowski R., Fleming W.H., Rishel R., Beneš V.E., Karatzas I., Harris L., Zabczyk J. (patrz np. [1], [2], [9]– [12], [14], [23], [26], [29]– [31]). Literatura przedmiotu jest ogromna, aspekty praktyczne przedstawiane są w setkach książek i artykułów.

Okazuje się, że nieznajomość horyzontu sterowania również wywiera dość duży wpływ na wartość wskaźnika jakości oraz wielkości sterowań. W niektórych zada-

niach przyjęcie ustalonego horyzontu sterowania nie prowadzi do adekwatnego modelu sytuacji. Na przykład, w zadaniach typu selflearning, w problemach sztucznej inteligencji, zarządzaniu portfelem inwestycyjnym przyjmuje się, że horyzont działania zależy jest od otrzymanych wyników. Wskazane jest, aby zatrzymać proces w pierwszym momencie uzyskania satysfakcjonujących efektów. W takiej sytuacji oprócz wyznaczenia sterowań, dodatkowo należy podjąć decyzję odnośnie kontynuacji bądź zatrzymania sterowania systemem. W innych przypadkach nie mamy w ogóle żadnego wpływu na horyzont sterowania. Przykładowo, czas "życia" produktu, czas bezawaryjnej pracy urządzenia technicznego, czy też liczba strat poniesionych w procesie produkcji nie jest znana odgórnie. Powstaje pytanie: jak sterować systemem, jeżeli horyzont nie jest sprecyzowany (dokładnie określony).

Cykl publikacji, które wchodzi w skład osiągnięcia naukowego, przedstawia matematyczne aspekty dotyczące wyznaczenia optymalnego sterowania systemami stochastycznymi z czasem dyskretnym. W ramach osiągnięcia:

- pokazano różnice pomiędzy sterowaniami w warunkach pełnej i niepełnej informacji o parametrach systemu;
- przedstawiono różnice i podobieństwa pomiędzy aktywnym i pasywnym uczeniem się systemu;
- przeanalizowano wpływ horyzontu sterowania na wskaźnik jakości;
- przedstawiono rozwiązania zadania optymalnego sterowania systemem stochastycznym dla przypadku, gdy horyzont sterowania jest losowy oraz nie zależy od stanów systemu;
- zaprezentowano dwa sposoby rozwiązania zadania optymalnego zatrzymania dla sterowanych systemów stochastycznych. Jeden ze sposobów polega na rozszerzeniu wektora sterowań o dodatkową zmienną decyzyjną dotyczącą zatrzymania systemu (problem stopowania przy pomocy sterowania), drugi zaś na zastosowaniu optymalnych zasad zatrzymania procesów losowych;
- zaproponowano zastąpienie problemu wyznaczenia optymalnego sterowania problemem wyznaczenia optymalnej trajektorii (uporządkowany ciąg optymalnych stanów systemu) dla systemu sterowanego, gdzie poprzez naśladowanie

stanów system realizuje główny cel sterowania;

- dla każdego z omówionych problemów podano efektywne rozwiązania w postaci twierdzeń oraz dodatkowo przedstawiono algorytmy wyznaczenia optymalnych sterowań (optymalnej trajektorii).

3.3 Optymalne sterowanie systemami stochastycznymi z czasem dyskretnym

Na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) definiujemy ciąg $\{w_i\}_{1 \leq i \leq N}$ niezależnych wektorów losowych $w_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(\bar{0}, I_m)$, gdzie $\bar{0} \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem zerowym, natomiast $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ – macierzą jednostkową. Niech $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ będzie wektorem losowym o rozkładzie a priori $P(d\xi)$, natomiast $y_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ – stanem początkowym o rozkładzie $P(dy_0)$. Zakładamy stochastyczną niezależność wszystkich wymienionych obiektów. Definiujemy niemalejące rodziny σ -ciał $\{\mathcal{F}_i\}_{0 \leq i \leq N}$ i $\{\mathcal{F}_i^\xi\}_{0 \leq i \leq N}$, gdzie $\mathcal{F}_i = \sigma\{y_0\} \vee \sigma\{w_s : s = 1, 2, \dots, i\}$, $\mathcal{F}_i^\xi = \mathcal{F}_i \vee \sigma\{\xi\}$ oraz przyjmujemy $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N^\xi$. Zakładamy, że system stochastyczny jest określony za pomocą równania stanu

$$y_{i+1} = f(\xi, y_i, u_i) + \sigma(\xi, y_i)w_{i+1}, \quad (1)$$

gdzie $i = 0, \dots, N-1$, $y_i \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $\sigma : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}(n, m)$, gdzie $\mathbb{M}(n, m)$ jest zbiorem macierzy o n -wierszach i k -kolumnach.

Wektor $u_i \in \mathbb{R}^l$, $0 \leq i \leq N-1$ mierzalny względem σ -ciała \mathcal{F}_i nazywamy działaniem sterującym. Dla ustalonego horyzontu czasowego N sterując systemem (1) w momentach $i = 0, 1, \dots, N-1$ podejmujemy ciąg działań sterujących $\{u_i\}_{0 \leq i \leq N-1}$, który nazywamy sterowaniem dopuszczalnym. Klasę sterowań dopuszczalnych oznaczamy przez U .

Aby sformułować cel sterowania definiujemy funkcję strat $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ oraz funkcję dziedziczenia $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Zakładamy, że $g(y, u)$ oraz $h(y)$ są ciągłe i ograniczone. Wskaźnik jakości definiujemy jako sumę strat w chwilach $j = 0, 1, \dots, N-1$ oraz dziedziczenia na końcu horyzontu czasowego N .

Funkcja celu reprezentuje stratę całkowitą oraz jest dana wzorem

$$J^N(u) = E \left(\sum_{i=0}^{N-1} g(y_i, u_i) + h(y_N) \right). \quad (2)$$

Problem optymalnego sterowania adaptacyjnego systemem stochastycznym (1) polega na minimalizacji strat całkowitych. Aby wyznaczyć optymalne sterowanie systemem (1) należy rozwiązać zadanie

$$\inf_{u \in U} J^N(u), \quad (3)$$

tzn. należy wyznaczyć takie sterowanie dopuszczalne $u^* = (u_0^*, \dots, u_{N-1}^*)$, dla którego infimum jest osiągnięte.

Do rozwiązania zadania (3) wykorzystano podejście R.Rishela (patrz np. [26]). Dla systemów (1) z niepełną informacją o parametrach dodatkowo wykorzystano zagadnienie filtracji, które polega na oszacowaniu warunkowego rozkładu nieznanymi parametrów ξ (patrz np. [24], [25]).

W pracy [O1] podano twierdzenie zawierające warunek konieczny istnienia optymalnego sterowania w postaci twierdzenia. W pracach [O2], [5], [8], [7] przedstawiono rozwiązania zadania (3), jeżeli funkcjonal strat $g(\cdot)$ we wzorze (2) dodatkowo zależy od parametrów systemu ξ (tzn. $g(\xi, y_j, u_j)$) lub zależy od przyszłych stanów (np. $g(\xi, y_j, y_{j+1}, u_j)$ lub $g(y_j, y_{j+1}, u_j)$).

Do wyznaczenia optymalnych sterowań wykorzystana została technika programowania dynamicznego. Dla dowolnego $0 \leq j \leq N$ definiujemy funkcje Bellmana (patrz np. [9]) w sposób następujący

$$V_j^N(\xi, y_0, \dots, y_j) = E \left(\sum_{i=j}^{N-1} g(y_i, u_i^*) + h(y_N) \middle| \mathcal{F}_j^\xi \right), \quad (4)$$

natomiast dla momentu N przyjmujemy

$$V_N^N(\xi, y_0, \dots, y_N) = h(y_N). \quad (5)$$

Funkcja Bellmana $V_j^N(\xi, y_0, \dots, y_j)$ reprezentuje oczekiwane koszty sterowania i dziedziczenia od momentu j do końca horyzontu N dla przypadku, gdy znane są parametry $\xi \in \mathbb{R}^k$. Z własności warunkowej wartości oczekiwanej otrzymujemy

$$\begin{aligned} V_j^N(\xi, y_0, \dots, y_j) &= \inf_{u_j} \left(g(y_j, u_j) + E \left(V_{j+1}^N(\xi, y_0, \dots, y_{j+1}) \mid \mathcal{F}_j^\xi \right) \right) \\ &= g(y_j, u_j^*) + E \left(V_{j+1}^N(\xi, y_0, \dots, y_{j+1}) \mid \mathcal{F}_j^\xi \right), \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie u_j^* oznacza sterowanie optymalne w chwili j .

Jeżeli parametry $\xi \in \mathbb{R}^k$ są nieznane, to wielkość

$$\begin{aligned} \bar{V}_j^N(y_0, \dots, y_j) &= E \left(V_j^N(\xi, y_0, \dots, y_{j+1}) \mid \mathcal{F}_j \right) \\ &= \inf_{u_j} \left(g(y_j, u_j) + E \left(V_{j+1}^N(\xi, y_0, \dots, y_{j+1}) \mid \mathcal{F}_j \right) \right) \end{aligned} \quad (7)$$

reprezentuje oczekiwane koszty sterowania i dziedziczenia od momentu j do końca horyzontu N .

W pracy [O1] przedstawiono również algorytm wyznaczenia optymalnego sterowania systemem (1) dla zadania (3), który wykorzystuje funkcje Bellmana (4)-(5). Dodatkowo podano sposób oszacowania kosztów związanych z nieznaną wartością parametrów ξ . W warunkach niepełnej informacji o systemie oczekiwany koszt realizacji celu $\bar{V}_j^N(y_0, \dots, y_j)$ (koszty sterowania i uczenia się jednocześnie) od momentu j do momentu N jest dany wzorem (7) i zależy bezpośrednio od rozkładu a priori wektora losowego ξ , trajektorii y_0, \dots, y_j , a także, pośrednio, od sterowań u_0, \dots, u_{j-1} . W przypadku pełnej informacji koszt realizacji celu $V_j^N(y_0, \dots, y_j)$ od momentu j do końca horyzontu N jest dany wzorem (6) oraz zależy od parametrów ξ i położenia y_j . Dla dowolnego $0 \leq j \leq N - 1$ dodatkowy koszt związany z nieznaną wartością parametrów ξ wynosi

$$C_j = \bar{V}_j^N(y_0, \dots, y_j) - V_j^N(\xi, y_0, \dots, y_j),$$

natomiast koszt C_0 oznacza oczekiwany całkowity koszt uczenia się podczas realizacji

celu sterowania.

W warunkach pełnej informacji sterowanie u_j , $0 \leq j \leq N - 1$, wyznaczamy na podstawie trajektorii (y_0, \dots, y_j) i wektora ξ , przyjmujemy

$$u_j \stackrel{def}{=} u_j(\xi, y_0, \dots, y_j). \quad (8)$$

W przypadku niepełnej informacji sterowanie adaptacyjne u_j , $0 \leq j \leq N - 1$ wyznaczamy na podstawie trajektorii (y_0, \dots, y_j) i warunkowego rozkładu $P(d\xi | \mathcal{F}_j)$, wobec powyższego przyjmujemy

$$\bar{u}_j \stackrel{def}{=} \bar{u}_j(y_0, \dots, y_j). \quad (9)$$

Jeżeli parametry systemu nie są znane, to dość często w zastosowaniach inżynierskich wykorzystuje się sterowanie "dostrojone". Polega ono na wykorzystaniu sterowań jak w przypadku pełnej informacji o systemie, z tym że nieznanemu parametr zastępuje się estymatorem. Ogólnie, sterowanie adaptacyjne różni się od sterowania "dostrojonego", tzn. dla $0 \leq j \leq N - 1$

$$\bar{u}_j(y_0, \dots, y_j) \neq u_j(E(\xi | \mathcal{F}_j), y_0, \dots, y_j).$$

W monografii [O1] pokazano, że dla zadania liniowo-kwadratowego sterowania adaptacyjne i "dostrojone" są równe.

Temat aktywnego uczenia się systemów stochastycznych dla ustalonego przedziału czasowego został szeroko omówiony w pracach [O2], [O3], [O4]. W pracy [O2] jako cel sterowania przyjęto minimalizację entropii łącznej, która jest miernikiem niepewności zachowania się systemu. Natomiast w pracy [O3] pokazano różnice i podobieństwa występujące podczas aktywnego i pasywnego uczenia się systemu. Aktywne uczenie się jest związane ze sterowaniem adaptacyjnym, natomiast uczenie pasywne wynika ze sterowania "dostrojonego". W [O4] przedstawiono problem aktywnego uczenia z uwzględnieniem entropii warunkowej, dodatkowo oszacowano przyrosty informacji o systemie w procesie uczenia.

W pracy [01] przedstawiono efektywne rozwiązania dla zadania liniowo-kwadratowego oraz przeanalizowano wpływ losowego przesunięcia występującego w systemie na wskaźnik jakości. Ten problem pojawia się, gdy sterujemy obiektem (bądź identycznymi obiektami) w różnych warunkach, natomiast dokładnej informacji o otoczeniu nie posiadamy. Rozważamy problem optymalnego sterowania systemem stochastycznym o równaniu stanu

$$y_{i+1} = Ay_i + B\xi - Cu_i + \sigma w_{i+1}, \quad (10)$$

gdzie $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest wektorem losowym o rozkładzie normalnym $\mathbf{N}(m_0, \Gamma_0)$, $m_0 \in \mathbb{R}^k$, $\Gamma_0 \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Dodatkowo zakładamy $\|A\| < \infty$, $\|B\| < \infty$, $\|C\| < \infty$, $\|\sigma\| < \infty$, gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę macierzy. Wskaźnik jakości jest dany wzorem

$$J^N(u) = E \left(\sum_{i=0}^{N-1} u_i^T R_i u_i + (y_N - a)^T Q_N (y_N - a) \right), \quad (11)$$

gdzie macierze $R_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$ dla $i = 0, \dots, N-1$ oraz $Q_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ są dodatnio określone.

Dla dowolnego $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ w warunkach pełnej informacji optymalne sterowanie systemem (10) jest równe

$$u_j^* = H_j (A^{N-j} y_j + \Lambda_j B \xi - a), \quad (12)$$

natomiast w warunkach niepełnej informacji

$$\bar{u}_j^* = H_j (A^{N-j} y_j + \Lambda_j B m_j - a), \quad (13)$$

gdzie macierze H_j i Λ_j są dane wzorami

$$H_j = \left(\bar{R}_j + (A^{N-j+1} C)^T \bar{Q}_{j+1}^N A^{N-j+1} C \right)^{-1} (A^{N-j+1} C)^T Q_{j+1}^N,$$

$$\Lambda_j = I + A + \dots + A^{\max(0, j-1)}.$$

Wielkość $m_j = E(\xi | \mathcal{F}_j)$ jest najlepszym estymatorem w sensie średniokwadratowym

towym wektora losowego ξ , natomiast ciąg macierzy $\{Q_j^N\}_{0 \leq j \leq N-1}$ spełnia równanie

$$Q_j^N = Q_{j+1}^N - (Q_{j+1}^N)^T A^{N-j-1} C \\ \times \left(\bar{R}_j + (A^{N-j-1} C)^T \bar{Q}_{j+1}^N A^{N-j-1} C \right)^{-1} (A^{N-j-1} C)^T Q_{j+1}^N, \quad (14)$$

z warunkiem początkowym $Q_N^N = Q_N$ oraz

$$\bar{R}_j = \frac{1}{2} (R_j + R_j^T), \quad \bar{Q}_j^N = \frac{1}{2} \left(Q_j^N + (Q_j^N)^T \right). \quad (15)$$

Dla dowolnego $j \in 0, 1, \dots, N-1$ różnica oczekiwanych kosztów sterowania od momentu j do końca horyzontu N , spowodowana nieznanymi parametrami ξ , jest równa

$$\bar{V}_j^N(y_0, \dots, y_j) - V_j^N(E(\xi | \mathcal{F}_j), y_0, \dots, y_j) = \Psi_j^N, \\ \Psi_j^N = \text{tr} \left((\Lambda_{N-j} B)^T Q_{j+1}^N \Lambda_{N-j} B \Gamma_j \right), \quad (16)$$

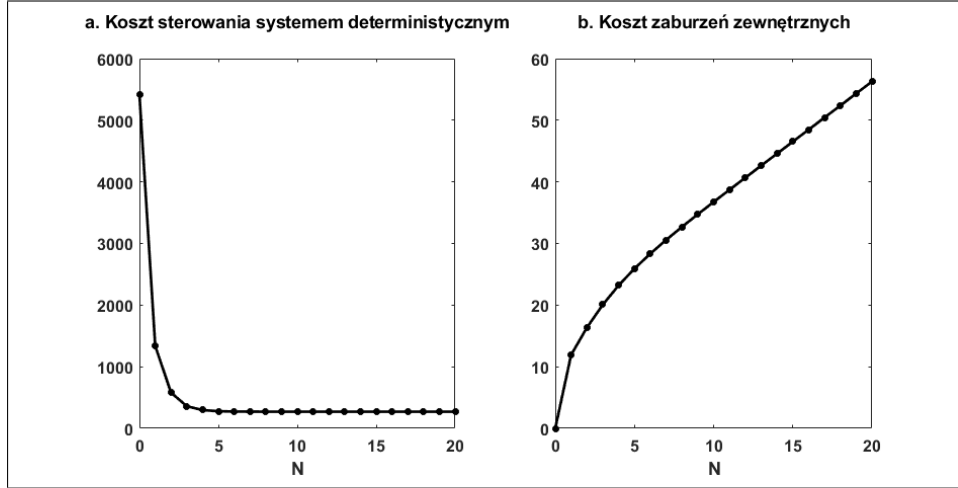
gdzie macierz I jest macierzą jednostkową oraz $\Gamma_j = \left(I + j \Gamma_0 B^T (\sigma \sigma^T)^{-1} B \right)^{-1} \Gamma_0$. Zatem w przypadku nieznanymi parametrami ξ podczas realizacji celu w N krokach ponosimy dodatkowy oczekiwany koszt wielkości Ψ_0^N . Zarówno dla przypadków pełnej i niepełnej informacji o parametrach systemu wielkość

$$\varphi_0^N = \sum_{i=1}^N \text{tr} \left((A^{N-i} \sigma)^T Q_i^N A^{N-i} \sigma \right)$$

reprezentuje oczekiwany koszt spowodowany ciągiem zaburzeń zewnętrznych $\{w_i\}_{1 \leq i \leq N}$ podczas sterowania systemem.

Całkowity koszt sterowania zależy od długości przedziału czasowego. Aby wyznaczyć optymalny horyzont należy rozwiązać zadanie czasooptymalne (patrz np. [5], [28], [31])

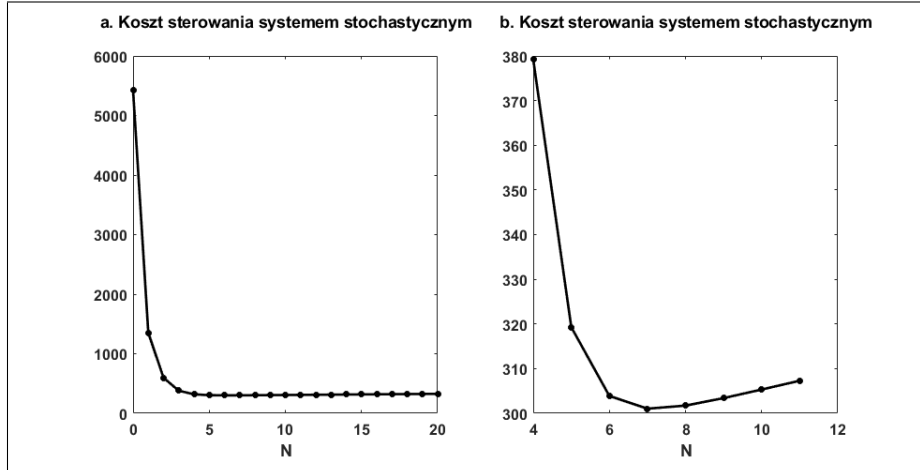
$$\inf_{N \in \mathbb{N}} \inf_{u \in U} J^N(u). \quad (17)$$



Rysunek 1: Koszty sterowania systemem deterministycznym oraz koszty eliminacji zaburzeń zewnętrznych.

W monografii [O1] (przykład 2.2) i artykule [6] zaprezentowano wpływ horyzontu na koszty sterowania systemami deterministycznym i stochastycznym dla zadania liniowo-kwadratowego. Dla systemu (10) przyjęto $\xi = \mathbf{col}(0, 0)$. Okazuje się, że funkcja opisująca najmniejsze koszty sterowania systemem deterministycznym (macierz σ jest macierzą zerową) jest funkcją nierosnącą ze względu na horyzont N . Na rysunku 1a przedstawione są koszty sterowania systemem deterministycznym $V_0^N(y_0) = [A^N y_0 - a]^T Q_0^N [A^N y_0 - a]$ dla $N = 0, 1, 2, \dots, 20$. W przypadku systemu stochastycznego dla każdego momentu $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ koszt eliminacji przyszłych zaburzeń zewnętrznych $\{w_i\}_{j+1 \leq i \leq N}$ wynosi $\varphi_j^N = \varphi_{j+1}^N + \text{tr} \left[(A^{N-j-1} \sigma)^T Q_{j+1} A^{N-j-1} \sigma \right]$ z warunkiem początkowym $\varphi_N^N = 0$. Na rysunku 1b przedstawione są koszty związane z wpływem zaburzeń zewnętrznych φ_0^N . Ciąg kosztów sterowań $\{\varphi_0^N\}_{1 \leq N \leq 20}$ jest ciągiem niemalejącym. Zatem wydłużając horyzont sterowania N dla systemu stochastycznego ponosimy coraz większe koszty spowodowane wpływem zaburzeń zewnętrznych. Rysunek 2a przedstawia oczekiwane koszty sterowania $V_0^N(y_0) = [A^N y_0 - a]^T Q_0^N [A^N y_0 - a] + \varphi_0^N$ systemem stochastycznym dla horyzontu $N = 0, 1, 2, \dots, 20$, natomiast rysunek 2b pokazuje wartości $V_0^N(y_0)$ dla $N \in [4, 11]$. W omawianym przypadku sterując systemem deterministycz-

nym należy ustalić horyzont $N = 20$, natomiast sterując systemem stochastycznym należy przyjąć $N = 7$.



Rysunek 2: Koszty sterowania systemem stochastycznym.

3.4 Optymalne sterowanie adaptacyjne dla horyzontu losowego niezależnego od stanów systemu

W niektórych zadaniach optymalnego sterowania horyzont nie jest ustalony odgórnie oraz nie zależy od zachowania systemu, tzn. stan systemu nie ma wpływu na czas działania, sterowania systemem (patrz np. [O1], [O5], [15], [16], [17]). Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład w procesie produkcyjnym, gdy czas bezawaryjnej pracy urządzeń nie jest znany (np. [13]). Horyzont sterowania modelujemy za pomocą zmiennej losowej, która nie zależy od stanów systemu. Niech $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ będzie zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, tzn. $P(\tau = k) = p_k$, $0 \leq p_k \leq 1$ dla $k \in \mathbb{N}_0$ oraz $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$, która oznacza horyzont sterowania systemem (1) i nie zależy od stanów systemu. Przyjmujemy następujące oznaczenia: $\mathcal{F}^\tau = \sigma\{\tau\}$, $\mathcal{F}_j^{\xi\tau} = \mathcal{F}_j^\xi \vee \sigma\{\tau > j\}$ oraz $\mathcal{F}_j^\tau = \mathcal{F}_j \vee \sigma\{\tau > j\}$. Jeżeli $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, N\}$, to przyjmujemy $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N^{\xi\tau}$, natomiast dla przypadku $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ przyjmujemy $\mathcal{F} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}_t^{\xi\tau}$.

Celem sterowania adaptacyjnego jest minimalizacja całkowitych kosztów (2). Rozwiązując zadanie

$$\inf_{u \in U} EJ^\tau(u) \quad (18)$$

wyznaczamy sterowanie u^* , dla którego infimum jest osiągnięte.

Jeżeli horyzont sterowania zostanie zastąpiony poprzez wartość $[E\tau]$ (gdzie $[\cdot]$ oznacza część całkowitą z liczby rzeczywistej lub zaokrąglenie do liczby naturalnej), to do rozwiązania zadania

$$\inf_{u \in U} J^{[E\tau]}(u) \quad (19)$$

stosujemy bezpośrednio wyniki dotyczące sterowania adaptacyjnego z ustalonym horyzontem (patrz np. [O2] rozdz. 3.2, [14], [26]). Wartym odnotowania jest fakt, że optymalne sterowania dla zadań (18) i (19) są różne.

Zbiór realizacji zmiennej losowej τ reprezentującej horyzont sterowania może być skończony bądź przeliczalny. W pracach [O1], [O5] zadanie (18) z losowym horyzontem zostało sprowadzone do zadania optymalnego sterowania z ustalonym horyzontem, jeżeli $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, N\}$, lub nieskończonym horyzontem, jeżeli $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$. W przypadku, gdy $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, N\}$, to wartość oczekiwana wskaźnika jakości (2) jest równa

$$\bar{J}^N(u) = EJ^\tau(u) = E \left(\sum_{j=0}^N \phi_j(y_j, u_j) \right), \quad (20)$$

gdzie

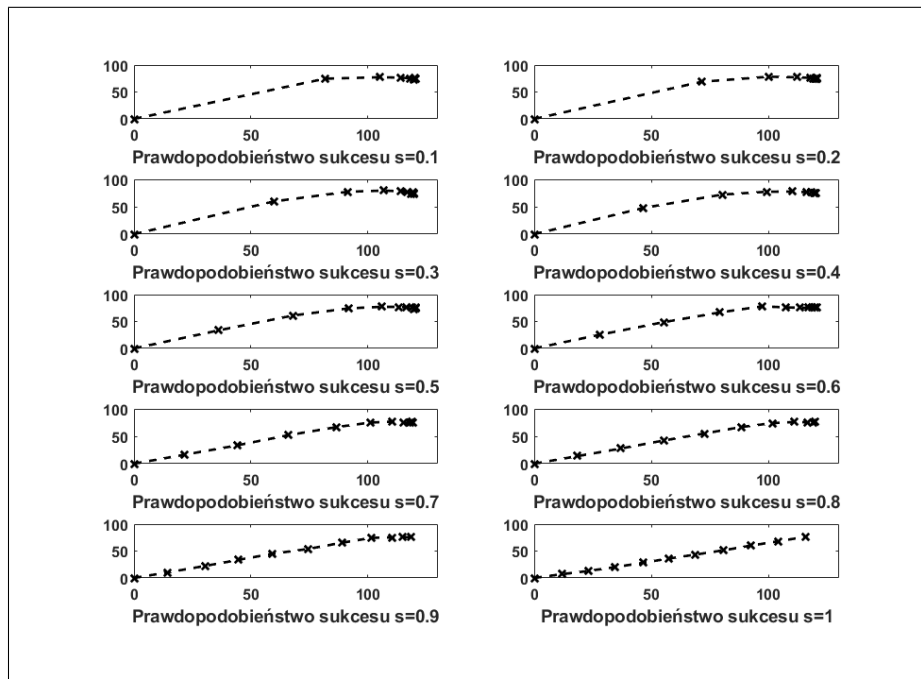
$$\phi_j(y_j, u_j) = g(y_j, u_j) P(\tau > j) + h(y_j) p_j, \quad (21)$$

$$\phi_N(y_N, u_N) = h(y_N) p_N. \quad (22)$$

W pracach [O1], [O5] przedstawiono efektywne rozwiązanie zadania (18), podano warunki konieczne optymalnego sterowania w postaci twierdzeń oraz zaprezentowano algorytmy wyznaczenia optymalnego regulatora. Dodatkowo przedstawiono sposób sterowania, jeżeli długość przedziału, w którym oddziałujemy na system, jest

losowa. Jeżeli horyzont sterowania jest zmienną losową o skończonej liczbie realizacji $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, N\}$, $N < \infty$, to rozwiązując zadanie (3) dla wskaźnika jakości (20) wyznaczamy sterowanie optymalne $u^* = (u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*)$. Natomiast bezpośrednio sterując systemem (1) należy zastosować sterowanie $(u_0^*, u_1^*, \dots, u_{\tau-1}^*) \subset u^*$.

Rysunek 3 przedstawia symulacje trajektorii liniowego systemu stochastycznego z kwadratowym wskaźnikiem jakości ([O1], przykład 3.3), gdzie horyzont sterowania jest zmienną losową $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, N\}$ o rozkładzie dwumianowym z prawdopodobieństwem sukcesu $s = 0.1, 0.2, \dots, 1$. Dla $s = 1$ mamy klasyczne zadanie z ustalonym horyzontem N . Z rysunku 3 widzimy, że system równomiernie pokonuje ścieżkę z punktu y_0 do punktu a (realizacje ciągu $\{y_i\}_{0 \leq i \leq N}$ są równomiernie rozłożone na drodze od y_0 do celu a). Jeżeli $0 < s < 1$, to system większe odległości pokonuje na początku, a następnie jest dosterowywany do celu a . Im mniejsze prawdopodobieństwo sukcesu s , tym większe są nakłady energetyczne związane ze sterowaniem w momentach początkowych.



Rysunek 3: Symulacje zachowań systemu liniowego z losowym horyzontem o rozkładzie dwumianowym.

W pracy [O1] zwrócono uwagę na istotne różnice w sterowaniach dla przypadków z ustalonym i losowym horyzontem niezależnym od stanów systemu. W [O1] (patrz przykład 3.1) zaprezentowano optymalne sterowania dla bardzo prostego systemu liniowo-kwadratowego działającego w układzie otwartym. Okazuje się, że jeżeli horyzont jest ustalony i równy N , to system (bez sprzężenia zwrotnego) pozostaje w bezczynności w momentach $j = 0, 1, \dots, N - 2$, natomiast działanie sterujące podejmujemy tylko w momencie $j = N - 1$. Jeżeli horyzont sterowania jest losowy (nie wiemy ile razy będziemy sterować systemem), to działania sterujące należy podejmować w każdej chwili, która nie jest momentem końcowym.

Problem sterowania systemem stochastycznym z losowym horyzontem o przeliczalnej liczbie realizacji jest bardziej skomplikowany. Wyznaczenie ciągu sterowań optymalnych $\{u_t^*\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ od strony praktycznej jest nierealne. W pracy [O1] zaproponowano rozwiązanie tego problemu. Jeżeli $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$, to wartość oczekiwana wskaźnika jakości (2) jest równa

$$\bar{J}^\infty(u) = EJ^\tau(u) = E \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(y_j, u_j) \right), \quad (23)$$

gdzie $\phi_j(y_j, u_j)$ jest dane wzorem (21). W tym przypadku zadanie optymalnego sterowania z losowym horyzontem o przeliczalnej liczbie realizacji sprowadza się do zadania optymalnego sterowania z nieskończonym horyzontem. Wyznaczenie optymalnego sterowania u^* polega na zastosowaniu idei programowania dynamicznego wstecz. Od strony praktycznej konstrukcja funkcji Bellmana z warunkiem początkowym dla horyzontu ∞ nie jest możliwa. W pracy [O1] omówiono problem zbieżności wskaźnika jakości oraz przedstawiono sposób wyznaczenia ε -optymalnego sterowania.

Definicja 3.4 Sterowanie $(u_0^*, u_1^*, \dots, u_{\tau-1}^*) \subset u^*|_N = (u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*, \mathbf{0}, \dots)$ nazywamy ε -optymalnym sterowaniem dla systemu z losowym horyzontem $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ o przeliczalnej liczbie realizacji, gdzie

$$N \geq N_\varepsilon = \min \{k \in \mathbb{N}_0 : |\bar{J}^\infty(u) - \bar{J}^k(u)| < \varepsilon\}, \quad (24)$$

oraz $\mathbf{0} = \text{col}(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^l$.

Sterując systemem z losowym horyzontem o przeliczalnej liczbie realizacji, działania sterujące należy podejmować co najwyżej do momentu N , natomiast po przekroczeniu momentu N system zachowuje się biernie. Różnica wartości wskaźników jakości dla horyzontów N i ∞ nie przekracza ustalonego $\varepsilon > 0$. W [O1] podano również sposób oszacowania momentu N oraz algorytm wyznaczenia ε -optymalnego sterowania $u^*|_N$.

3.5 Optymalne zatrzymanie systemów sterowanych

Przyjęcie ustalonego horyzontu N (horyzontu niezależnego od wyników sterowania) w niektórych zadaniach optymalnego sterowania nie prowadzi do adekwatnego modelowania sytuacji, a wręcz uniemożliwia osiągnięcie lepszych efektów. Warty odnotowania jest fakt, że w zadaniach optymalnego sterowania systemami stochastycznymi, aby lepiej zrealizować cel, należy uwzględnić możliwość zatrzymania systemu (procesu sterowania systemem). Zatem w każdym momencie, oprócz wyznaczenia optymalnego sterowania, należy również podjąć decyzję odnośnie kontynuowania sterowania bądź zatrzymania systemu. Zadania tego typu nazywamy zadaniami optymalnego sterowania ze stopowaniem systemu stochastycznego. W tym przypadku równolegle należy rozwiązywać zadanie optymalnego sterowania i zadanie optymalnego stopowania. W pracach [O1], [O7], [O8], [3], [4], [18] omówiono dwa podejścia rozwiązania przedstawionego wyżej problemu. Dodatkowo przedstawiono rozwiązania w postaci twierdzeń i algorytmów wyznaczenia optymalnych sterowań oraz momentu zatrzymania procesu sterowania. Jeden ze sposobów rozwiązania zadania polega na możliwości stopowania (zatrzymania) procesu za pomocą sterowania. Podejście drugie oparte jest na konstrukcji koperty Snella (patrz np. [27]).

Rozważamy problem sterowania systemem stochastycznym o równaniu stanu (1). Niech zmienna losowa $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, N\}$ będzie momentem Markowa względem rodziny σ -ciał \mathcal{F}_j , $0 \leq j \leq N$ oraz $P(\tau \leq N) = 1$. Zmienna losowa τ oznacza moment zatrzymania systemu (moment zakończenia procesu sterowania tym syste-

mem). Zatem horyzont sterowania systemem jest losowy oraz nie przekracza czasu końcowego N . Dla dowolnego $0 \leq j \leq N$ klasę momentów Markowa o realizacjach w zbiorze $\{j, j+1, \dots, N\}$ oznaczamy przez $\mathcal{T}(j, N)$, natomiast klasę wszystkich momentów Markowa oznaczamy przez $\mathcal{T} = \mathcal{T}(0, N)$. Jeżeli sterujemy systemem do momentu $0 \leq t \leq N$, to całkowity koszt sterowania systemem jest równy

$$J(u, t) = E \left(\sum_{i=0}^{t-1} g(y_i, u_i) + h(y_t) \right). \quad (25)$$

Rozwiązując zadanie

$$\inf_{(u, \tau) \in U \times \mathcal{T}} J(u, \tau) \quad (26)$$

wyznaczamy optymalne sterowanie oraz moment zatrzymania systemu.

Problem optymalnego sterowania ze stopowaniem systemu stochastycznego jest złożony, wymaga rozwiązywania dwóch zadań jednocześnie: zadania optymalnego sterowania i zadania optymalnego stopowania. W każdym momencie decyzyjnym należy odpowiedzieć na dwa pytania: czy system powinien być sterowany oraz jakie jest optymalne sterowanie. Poniżej krótko omówione zostaną dwa sposoby rozwiązania zadania (26). Jeden z nich polega na modyfikacji wskaźnika jakości poprzez zastąpienie zmiennej określającej moment stopu zmienną sterującą. Jest to podejście zaproponowane przez T. Banka i E. Kozłowskiego (patrz [3], [4], [7]). Rozwiązanie tak zmodyfikowanego zadania nie wymaga wykorzystania narzędzi dotyczących optymalnego zatrzymania procesów losowych (klasyczna, czysto probabilistyczna metoda nie jest rozważana w tym przypadku). Drugi sposób polega na zastosowaniu optymalnej zasady zatrzymania procesów losowych. W pracach [O1], [O7], [O8] dokonano porównania wyżej wymienionych sposobów optymalnego sterowania ze stopowaniem. Każda z metod ma swoje wady i zalety. Metoda zamiany stopowania na sterowanie niewątpliwie jest prostsza w zastosowaniach, natomiast efekt osiągnięty za pomocą tej metody jest nieco gorszy. Dla każdej z tych metod zdefiniowano rodziny zbiorów optymalnego zatrzymania procesów sterowanych. Zbiory te nie są stałe oraz zależą od momentów decyzyjnych.

Optymalne zatrzymanie systemu przy pomocy sterowania

Metoda stopowania systemu za pomocą sterowania polega na rozszerzeniu wektora sterowania o zmienną binarną. \mathcal{F}_j mierzalny proces $\mathbf{u} = (\theta, u)$ nazywamy rozszerzonym sterowaniem dopuszczalnym, gdzie $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1})$ oraz $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$. Wektor $\theta : \Omega \rightarrow \{0, 1\}^N$ oznacza sterowanie decyzyjne dotyczące zatrzymania, natomiast u – sterowanie dopuszczalne. Jeżeli w momencie i kontynuujemy sterowanie systemem, to przyjmujemy $\theta_i = 1$, natomiast jeżeli w momencie i zatrzymujemy system, to przyjmujemy $\theta_i = 0$ oraz $\theta_j = 0$ dla $i < j \leq N-1$. Klasę sterowań dopuszczalnych (rozszerzonych) oznaczamy przez \mathbf{U} . Koszt w momencie $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ jest równy

$$\phi_i(\theta_i, y_i, u_i) = \theta_i g(y_i, u_i) + (1 - \theta_i) h(y_i). \quad (27)$$

Definiujemy

$$\psi_j^i(\theta) \triangleq \begin{cases} \prod_{s=j}^i \theta_s, & \text{dla } i \geq j, \\ 1, & \text{dla } i < j \end{cases} \quad (28)$$

dla $0 \leq i \leq j < N$. Oczekiwany całkowity koszt sterowania jest równy

$$J(\mathbf{u}) = E \left(\sum_{i=0}^{N-1} \phi_i(\theta_i, y_i, u_i) \psi_0^{i-1}(\theta) + h(y_N) \psi_0^{N-1}(\theta) \right), \quad (29)$$

gdzie $\psi_0^{-1}(\theta) = 1$. Wyznaczenie praw optymalnego sterowania i momentu zatrzymania polega na rozwiązaniu zadania

$$\inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} J(\mathbf{u}). \quad (30)$$

Zastępując problem (26) zadaniem (30) dokonano zamiany problemu sterowania adaptacyjnego ze stopowaniem na równoważny problem sterowania adaptacyjnego z ustalonym horyzontem. Zgodnie z konstrukcją wskaźnika jakości (29) moment

$$\tilde{\tau} = \min(\min\{i : \theta_i = 0, 0 \leq i \leq N-1\}, N)$$

jest momentem zatrzymania systemu. W pracach [O1], [3], [4] podano warunki konieczne oraz algorytm wyznaczenia optymalnego sterowania i momentu zatrzymania.

W pracy [O1] pokazano, że jeżeli $\{V_j^k(\xi, y_0, \dots, y_j)\}_{0 \leq j \leq k}$ jest ciągiem funkcji Bellmana dla zadania (3) z ustalonym horyzontem k , to funkcje Bellmana dla zadania (30) wyznaczamy jako

$$\begin{aligned} W_j^N(\xi, y_0, \dots, y_j) &= \inf_{\substack{u_j \\ \theta_j \in \{0,1\}}} \phi_j(\theta_j, y_j, u_j) + \theta_j E \left(W_{j+1}^N(\xi, y_0, \dots, y_{j+1}) \mid \mathcal{F}_j^\xi \right) \\ &= \min \left(V_j^j(\xi, y_0, \dots, y_j), \dots, V_j^N(\xi, y_0, \dots, y_N) \right), \end{aligned} \quad (31)$$

natomiast wielkość

$$\bar{W}_j^N(y_0, \dots, y_j) = E \left(W_j^N(\xi, y_0, \dots, y_j) \mid \mathcal{F}_j \right)$$

dla $0 \leq j \leq N$ reprezentuje najmniejsze oczekiwane koszty sterowania od momentu j do momentu zatrzymania systemu. Dla zadania (30) moment zatrzymania systemu jest dany wzorem

$$\tilde{\tau} = \min \{ 0 \leq j \leq N : \bar{W}_j^N(y_0, \dots, y_j) = h(y_j) \}.$$

Optymalne zatrzymanie sterowanych systemów stochastycznych

Inny sposób rozwiązania zadania (26) polega na wykorzystaniu zasady optymalnego stopowania procesów stochastycznych. Zgodnie z klasyczną zasadą zatrzymania procesów losowych wyznaczenie optymalnego momentu stopu dla zadania (26) polega na konstrukcji koperty Snella, która jest określona jako największy podmartynał dominujący zatrzymywany proces. Pierwszy moment, dla którego wartość procesu stochastycznego i otoczki Snella są równe, jest momentem zatrzymania tego procesu. W odróżnieniu od klasycznej teorii optymalnego zatrzymania procesu stochastycznego w zadaniu optymalnego sterowania ze stopowaniem (26) należy zatrzymać nie jeden proces, lecz rodzinę procesów (indeksowanych sterowaniem). Do roz-

wiązania zadania (26) konstruujemy ciąg funkcji Bellmana dla $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$S_j^N(\xi, y_0, \dots, y_j) = \inf_{u_j} \left\{ h(y_j), g(y_j, u_j) + E \left(S_{j+1}^N(\xi, y_0, \dots, y_{j+1}) \middle| \mathcal{F}_j^\xi \right) \right\} \quad (32)$$

z warunkiem początkowym

$$S_N^N(\xi, y_0, \dots, y_N) = h(y_N). \quad (33)$$

Otoczkę Snella $\{\bar{S}_j^N(y_0, \dots, y_j)\}_{0 \leq j \leq N}$ wyznaczamy w sposób następujący

$$\bar{S}_j^N(y_0, \dots, y_j) = \inf_{u_j} \left\{ h(y_j), g(y_j, u_j) + E \left(S_{j+1}^N(\xi, y_0, \dots, y_{j+1}) \middle| \mathcal{F}_j \right) \right\} \quad (34)$$

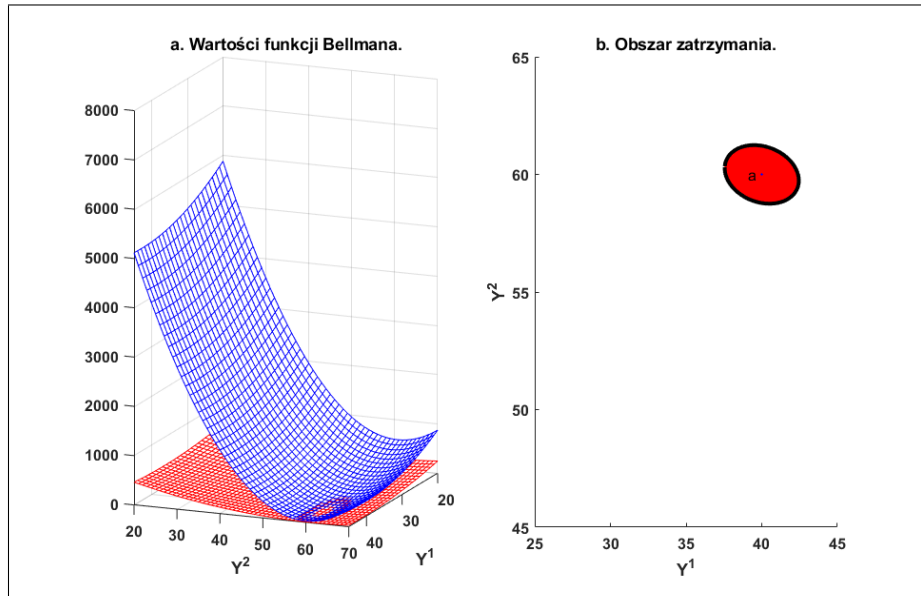
dla $0 \leq j < N$, natomiast $\bar{S}_N^N(y_0, \dots, y_N) = h(y_N)$. Moment

$$\tau = \min \{0 \leq j \leq N : h(y_j) = \bar{S}_j^N(y_0, \dots, y_j)\} \quad (35)$$

jest momentem zatrzymania systemu (1). W pracach [O1], [O7] podano warunki konieczne oraz algorytm wyznaczenia optymalnego sterowania i momentu zatrzymania dla zadania (26). Dodatkowo w [O1] przedstawiono zależności pomiędzy funkcjami Bellmana $V_j^N(\xi, y_0, \dots, y_j)$, $W_j^N(\xi, y_0, \dots, y_j)$, $S_j^N(\xi, y_0, \dots, y_j)$ są dane wzorami (6), (31), (32), które zostały skonstruowane dla zadań (3), (30) i (26) odpowiednio. Poza tym porównano momenty zatrzymania dla zadania (26) i zadania (30). Udowodniono, że moment zatrzymania $\tilde{\tau}$ dla zadania (30) nie przekracza momentu zatrzymania τ dla zadania (26). Wprowadzenie do klasycznego zadania optymalnego sterowania (3) możliwości zatrzymania systemu przed końcem horyzontu czasowego umożliwia redukcję łącznych kosztów sterowania i dziedziczenia.

Dla każdego momentu decyzyjnego przestrzeń stanów możemy podzielić na dwa rozłączne zbiory: zbiór zatrzymania systemu oraz zbiór kontynuacji sterowania. Zbiór zatrzymania jest to zbiór stanów, dla których system powinien być zatrzymany, żeby nie ponosić dodatkowych (większych) kosztów. W pracach [O1] i [O8] przedstawiono konstrukcje zbiorów zatrzymania wykorzystując funkcje Bellmana.

Zwrócono również uwagę na fakt, że zbiory te zależą od momentu decyzyjnego oraz posiadanej informacji o systemie. Dla systemu liniowego z kwadratowym wskaźnikiem jakości przedstawiono efektywne rozwiązania zadań (26) i (30).



Rysunek 4: Wartości funkcji Bellmana $S_N^N(y)$ oraz $S_{N-1}^N(y)$, obszar zatrzymania dla momentu $j = N - 1$.

W [O1] (patrz przykład 4.1) zaprezentowano rozwiązania dla zadania liniowo-kwadratowego z możliwością zatrzymania przed momentem N . Powierzchnia zaznaczona kolorem granatowym na rysunku 4a przedstawia wartości funkcji Bellmana dla momentu $j = N$, natomiast powierzchnia zaznaczona kolorem czerwonym przedstawia wartości funkcji Bellmana dla momentu $j = N - 1$. Na rysunku widzimy, że w pewnym otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}^2$ spełniona jest nierówność $S_N^N(y) \leq S_{N-1}^N(y)$. Rysunek 4b przedstawia obszar zatrzymania systemu liniowego dla momentu $j = N - 1$.

3.6 Optymalna trajektoria dla systemów sterowanych

W niektórych sytuacjach potrzebujemy wyznaczyć optymalną drogę dla sterowanych systemów dynamicznych zamiast bezpośrednio wyznaczać prawa optymalnego sterowania. Zatem należy zdefiniować uporządkowany ciąg stanów systemu

(zbiór punktów) $\{y_i\}_{0 \leq i \leq N}$ określający trajektorię, po której powinien poruszać się system. Klasyczny problem optymalnego sterowania (3) systemem stochastycznym (1) zastępujemy zadaniem polegającym na wyznaczeniu optymalnej trajektorii, poruszając się po której osiągamy najmniejsze koszty całkowite. Naśladując bezpośrednio określone stany systemu realizujemy główny cel sterowania w sposób optymalny. Problematyka wyznaczenia optymalnej trajektorii dla systemów stochastycznych częściowo została przedstawiona np. w pracach [O1], [O6], [19], [20], [22].

Poniżej zakładamy, że funkcje f, σ w równaniu (1) są ciągłe względem wszystkich argumentów oraz $f(\xi, y, u)$ jest różnowartościowa względem sterowania u . Ciąg stanów $\{y_i\}_{1 \leq i \leq N}$ nazywamy trajektorią dopuszczalną oraz oznaczamy $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$, natomiast klasę dopuszczalnych trajektorii oznaczamy przez Y . Przeprowadzając system ze stanu y_j do stanu y_{j+1} podejmujemy sterowanie wielkości

$$u_j = u_j(\xi, y_j, y_{j+1}, w_{j+1}) = f^{-1}(\xi, y_j, y_{j+1} - \sigma(\xi, y_j)w_{j+1}), \quad (36)$$

natomiast koszt sterowania w momencie j wynosi

$$g(\xi, y_i, y_{i+1}, w_{i+1}) = g(y_i, f^{-1}(\xi, y_j, y_{j+1} - \sigma(\xi, y_j)w_{j+1})). \quad (37)$$

Wskaźnik jakości definiujemy jako sumę kosztów poniesionych w momentach $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ oraz dziedziczenia na końcu horyzontu czasowego N

$$J^N(y) = E \left(\sum_{i=0}^{N-1} g(\xi, y_i, y_{i+1}, w_{i+1}) + h(y_N) \right). \quad (38)$$

Rozwiązanie zadania

$$\inf_{y \in Y} J^N(y) \quad (39)$$

polega na wyznaczeniu optymalnej trajektorii $y^* = (y_1^*, \dots, y_N^*)$. Zastąpienie zadania (3) zadaniem (39) pozwoliło dokonać zamiany problemu sterowania adaptacyjnego na problem równoważny. W pracach [O1], [O6] podano warunki konieczne oraz algorytm wyznaczenia optymalnej trajektorii. Do wyznaczenia ciągu opty-

malnych stanów systemu wykorzystana została technika programowania dynamicznego oraz zdefiniowano ciąg funkcji Bellmana. Dodatkowo w [O1] pokazano różnice i podobieństwa wyznaczenia optymalnej trajektorii w warunkach pełnej i niepełnej informacji o systemie oraz koszt uczenia się na ścieżce $\{y_j^*\}_{1 \leq j \leq N}$. Dla zadania liniowo-kwadratowego z ustalonym horyzontem i losowym horyzontem niezależnym od stanów systemu podano efektywne rozwiązania w postaci twierdzeń. Przykłady zaprezentowane w monografii [O1] pokazują wyraźny wpływ horyzontu sterowania na wartość wskaźnika jakości oraz na optymalną trajektorię.

4 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

Poniżej przedstawiam pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze uzyskane po doktoracie, a nie wchodzące w skład osiągnięcia podstawowego. Podjęto następujące tematy:

- opracowanie monografii poświęconej analizie i identyfikacji szeregów czasowych;
- wykorzystanie testów stacjonarności do analizy monitorowanych procesów resztkowych;
- rekonstrukcja obrazów w elektrycznej tomografii impedancyjnej;
- prognozowanie poboru wody oraz konstrukcja sterownika wspomagająca decyzję operatora ujęcia wody.

Wybrane publikacje wchodzące w skład osiągnięć naukowo-badawczych:

[P1] Kozłowski E.(100%), *Analiza i identyfikacja szeregów czasowych*, Politechnika Lubelska, Lublin 2015, ISBN: 978-83-7947-147-8; MNiSW: 25p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 100%. Obejmował on wszystkie etapy powstania monografii, w szczególności: a) opracowanie koncepcji i układu pracy; b) omówienie problematyki oraz sposobów identyfikacji szeregów czasowych; c) projektowanie algorytmów estymacji parametrycznej szeregów czasowych; d) analizę i interpretację wyników; e) przygotowanie publikacji do druku.

[P2] Kosicka E.(34%), Kozłowski E.(33%), Mazurkiewicz D.(33%), *The use of stationary test for analysis of monitored residual processes*, "Maintenance and

Reliability", 2015 vol. 17(4), p. 604–609; IF: 1.248; MNiSW: 20p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 33%. Obejmował on wszystkie etapy powstania pracy, w szczególności: a) omówienie problematyki oraz sformułowanie celu badań - 20%; b) opracowanie koncepcji i układu pracy - 35%; c) projektowanie i implementacja algorytmów - 50%; d) analizę i interpretację wyników - 30%; e) przygotowanie publikacji do druku - 30%.

- [P3] Rymarczyk T.(34%), Kłosowski G.(33%), Kozłowski E.(33%), *A non-destructive system based on electrical impedance tomography and machine learning to analyze the moisture of building*, "Sensors", 2018 vol. 18, 2285, doi: 10.3390/s18072285; IF: 2.475; MNiSW: 30p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 33%. Obejmował on wszystkie etapy powstania pracy, w szczególności: a) omówienie problematyki oraz sformułowanie celu badań - 33%; b) opracowanie koncepcji i układu pracy - 33%; c) projektowanie algorytmów - 33%; d) analizę i interpretację wyników - 33%; e) przygotowanie publikacji do druku - 33%.

- [P4] Kozłowski E.(25%), Kowalska B.(25%), Kowalski D.(25%), Mazurkiewicz D.(25%), *Water demand forecasting by trend and harmonic analysis*, "Archives of Civil and Mechanical Engineering", 2018 vol. 18, p. 140–148; IF: 2.763; MNiSW: 30p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 25%. Obejmował on wszystkie etapy powstania pracy, w szczególności: a) omówienie problematyki oraz sformułowanie celu badań - 20%; b) opracowanie koncepcji i układu pracy - 10%; c) projektowanie i implementacja algorytmów - 60%; d) analizę i interpretację wyników - 20%; e) przygotowanie publikacji do druku - 20%.

- [P5] Kozłowski E.(25%), Kowalska B.(25%), Kowalski D.(25%), Mazurkiewicz D.(25%), *Binary linear programming as a decision-making aid for water intake operators*, [In:] "Intelligent Systems in Production Engineering and Maintenance – ISPEM 2017" ed. by Burduk A., Mazurkiewicz D., *Advances in Intelligent Systems and Computing* vol. 637, Springer, 2018, p. 199-208; MNiSW: 15p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 25%. Obejmował on wszystkie etapy powstania pracy, w szczególności: a) omówienie problematyki oraz sformułowanie celu badań - 20%; b) opracowanie koncepcji i układu pracy - 20%; c) projektowanie algorytmu - 60%; d) analizę i interpretację wyników - 10%; e) przygotowanie publikacji do druku - 20%.

4.1 Analiza i identyfikacja szeregów czasowych

Przewidywanie zachowań różnorodnych systemów (fizycznych, technicznych, ekonomicznych itd.) nie jest łatwe. Aby móc dokładnie prognozować zachowanie takiego systemu, należy zbudować model oraz dokonać parametrycznej identyfikacji na podstawie danych empirycznych. Celem monografii [P1] było przedstawienie matematycznego podejścia do modelowania, analizy i identyfikacji szeregów czasowych. W pracy zaprezentowano sposoby wyznaczenia zarówno deterministycznych zależności występujących w szeregach czasowych, jak i zaburzeń zewnętrznych. W kolejnej części pracy omówiono własności stacjonarnych i niestacjonarnych szeregów oraz klasyczne metody weryfikacji stacjonarności. Dodatkowo przedstawiono własności modeli ARIMA, ARCH, GARCH, TARARCH, EGARCH itp. Do każdego z modeli podano algorytmy identyfikacji parametrycznej. W monografii [P1] zwrócono uwagę na problem identyfikacji parametrycznej w przypadku dynamicznie rozszerzającego się zbioru danych. W tym celu dodatkowo omówiono zagadnienie filtracji szeregów gaussowskich (warunkowo gaussowskich), które zostało wykorzystane do estymacji parametrów modeli AR, MA, ARMA, ARIMA oraz modeli rodziny ARCH.

4.2 Wykorzystanie testów stacjonarności do analizy monitorowanych procesów resztkowych

Dotrzymanie zobowiązań wobec kontrahentów jest jednym z czynników wpływających na poziom efektywności eksploatacyjnej w przedsiębiorstwie. Wzrost efektywności eksploatacyjnej maszyn poprzez przewidywanie awarii i przywracanie pełnej sprawności systemu produkcyjnego pozwala na terminową realizację zamówień, co z kolei przekłada się na efekty finansowe przedsiębiorstw. Celem pracy [P2] było zastosowanie testów stacjonarności do predykcji zdarzeń niepożądanych, którymi są awarie maszyn. W przypadku wykrycia niepokojących objawów dodatkowo szacowano resztkowy czas pracy tych urządzeń.

4.3 Rekonstrukcja obrazów w elektrycznej tomografii impedancyjnej

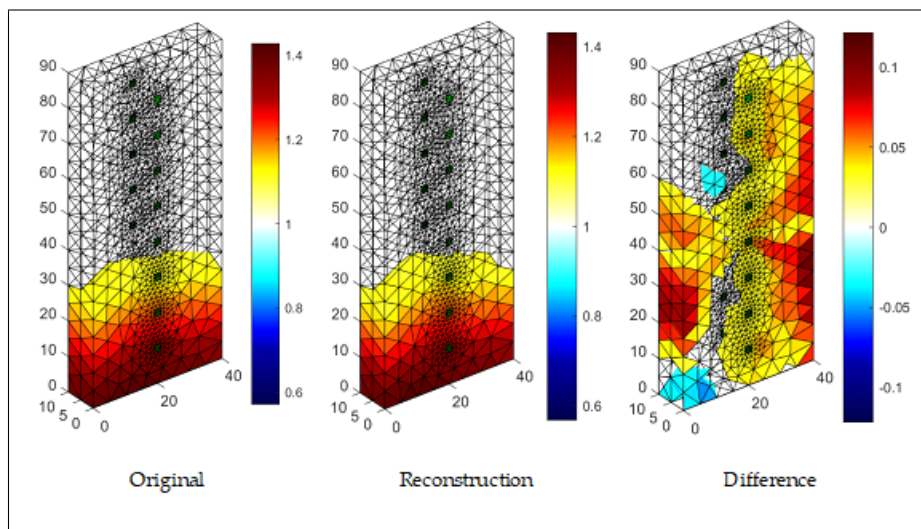
Kolejnym tematem mojej pracy naukowo-badawczej jest analiza zawilgoce-
nia ścian budynków, analiza przesiąkania wałów przeciwpowodziowych. W [P3] do
rozwiązania zadania zastosowano grupę algorytmów umożliwiających nadzorowane
uczenie maszynowe. Za pomocą tomografu hybrydowego ze specjalnymi czujnikami
odczytywane są napięcia na elektrodach (rysunek 5). Następnie dla każdego piksela
obrazu wyznaczano wartości przewodności. W wyniku rekonstrukcji otrzymano ob-
razy przestrzenne (3D) oraz przekroje (2D) zawilgoce-
nia wnętrza ścian budynków. Przykładowa rekonstrukcja jest pokazana na rysunku 6.



Rysunek 5: Badanie zawilgoce-
nia betonu komórkowego.

4.4 Prognozowanie poboru wody oraz konstrukcja sterow- nika wspomagającego decyzję operatora ujęcia wody

Czwarty temat badawczy dotyczy prognozowania zapotrzebowania na wodę
oraz planowania działań operacyjnych w przedsiębiorstwach wodociągowych. Jed-
nym z głównych zadań każdej firmy wodociągowej jest dostarczanie odbiorcom wy-
maganej ilości wody o odpowiedniej jakości i ciśnieniu, a także dostarczanie jej we



Rysunek 6: Wynik rekonstrukcji zawilgocenia.

właściwym czasie. W artykule [P4] przedstawiono rozwiązanie do prognozowania zużycia wody za pomocą analizy trendów fazowych i analizy harmonicznych składowych. Pokazano istotny wpływ temperatury otoczenia oraz zmiennej kategorycznej określającej typ dnia (roboczy i wolny od pracy) na parametry strukturalne modeli opisujących pobór wody.

Znaczącą część całkowitych kosztów operacyjnych ponoszonych przez przedsiębiorstwo wodociągowe stanowi koszt energii zużywanej w trakcie pompowania wody z ujęć głębinowych do zbiornika retencyjnego. W pracy [P5] przedstawiono model matematyczny opisujący koszt pracy pomp głębinowych oraz podano efektywne rozwiązanie minimalizujące całkowite koszty zużycia energii. W wyniku rozwiązania zadania powstaje harmonogram pracy pomp głębinowych, który wspomaga operatora w podjęciu ostatecznej decyzji.

5 Podsumowanie dorobku publikacyjnego

Mój dorobek publikacyjny obejmuje aktualnie 73 prace (w tym 66 po doktoracie). Poniżej przedstawiam statystyki bibliometryczne.

Kategoria	<dr	≥dr	Suma
Monografie	0	2	2
Redakcja materiałów konf. lub monografii	0	1	1
Artykuły w czasopismach znajdujących się na liście JCR	2	5	7
Pozostałe publikacje w czasopismach naukowych	2	14	16
Prace w mat. konferencyjnych o zasięgu międzynarodowym	1	19	20
Pozostałe prace recenzowane	2	25	27
Suma	7	66	73

Całkowita liczba cytowań prac według różnych baz publikacji wynosi:

Kategoria	Suma
Liczba cytowań według bazy Web of Science	32
Liczba cytowań według bazy Scopus	67
Liczba cytowań według bazy Google Scholar	134

Indeks h Hirscha publikacji według różnych baz jest równy:

Kategoria	Suma
Indeks h według bazy Web of Science	3
Indeks h według bazy Scopus	5
Indeks h według bazy Google Scholar	7

Sumaryczny Impact Factor publikacji¹ - 6.789

Pozostałe prace cytowane

- [1] Aoki M., *Optimization of stochastic systems*, Academic Press, 1967.
- [2] Astrom K.J., *Introduction to stochastic control theory*, Academic Press, New York 1970.

¹dwie publikacje ukazały się w roku 2018, dla tych publikacji wyliczono IF na podstawie listy za rok 2017.

- [3] Banek T., Kozłowski E., *Adaptive control with random horizon*, "Annales Informatica", 2005 vol. 3, p. 5–14.
- [4] Banek T., Kozłowski E., *Adaptacyjne sterowanie terminalne z losowym horyzontem*, [W:] *XV Krajowa Konferencja Automatyki*, pod red. Bubnicki Z., Kulikowski R., Kacprzyk J., t. 1, ARGRAF, Warszawa 2005, s. 257–261.
- [5] Banek T., Kozłowski E., *Self-learning jako zadanie sterowania dualnego*, [W:] *Systemowo-komputerowe wspomaganie zarządzania wiedzą*, pod red. Kulikowski R., Bubnicki Z., Kacprzyk J., Akademicka Oficyna Wydawnicza Exit, Warszawa 2006, s. 157–236.
- [6] Banek T., Kozłowski E., *Deterministic versus stochastic in the free horizon LQC problem*, [W:] *Aktualne problemy automatyki i robotyki*, pod red. Malinowski K., Józefczyk J., Świątek J., Wrocław 2014, s. 94–101.
- [7] Banek T., Kowalik P., Kozłowski E., *Fisher information criterion in stopped self-learning of linear systems*, [In:] *Process Control in Management*, ed. by Banek T., Toruń 2009, p. 41–52.
- [8] Banek T., Kulikowski R., *Adaptive control of Fisher information*, "Cybernetics and Systems Analysis", 2005 vol. 41(2), p. 224–232.
- [9] Bellman R., *Adaptive Control Processes*, Princeton, 1961.
- [10] Beneš V.E., Karatzas I., Rishel R., *The separation principle for a Bayesian adaptive control problem with no strict-sense optimal law*, [In:] *Applied stochastic analysis*, Stochastics Monographs vol. 5, ed. by Davis M.H.A., Elliott R.J., 1991, p. 121–156.
- [11] Feldbaum A.A., *Optimal Control Systems*, Academic Press 1965.
- [12] Fleming W.H., Rishel R., *Deterministic and stochastic optimal control*, Springer-Verlag, Berlin 1975.

-
- [13] Gola A., Kozłowski E., *Optimal production planning for a random horizon*, "Applied Mechanics and Materials", 2015 vol. 791, p. 63–69.
- [14] Harris L., Rishel R., *An algorithm for a solution of a stochastic adaptive linear quadratic optimal control problem*, "IEEE Transactions on Automatic Control", 1986 vol. 31(12), p. 1165–1170.
- [15] Kozłowski E., *The linear quadratic stochastic optimal control problem with random horizon at finite number of events independent of state system*, "Systems Science", 2010 vol. 36(3), p. 5–11.
- [16] Kozłowski E., *Identification of linear system in random time*, "International Journal of Computer and Information Technology", 2012 vol. 1(2), p. 103–108.
- [17] Kozłowski E., *Discrete time stochastic control with random finite horizon*, [In:] *Process Control in Management*, ed. by Banek T., Toruń 2009, p. 53–66.
- [18] Kozłowski E., *Optimal stopping in controlled linear systems with quadratic criterion*, [In:] *Robotics and Manufacturing systems*, ed. by Koukolova L., Świć A., 2014, p. 73–84.
- [19] Kozłowski E., *Optimal route and control for the LQC problem*, [In:] *Probability in action*, ed. by Banek T., Kozłowski E., 2014, p. 41–50.
- [20] Kozłowski E., *Differences between optimal routes for linear quadratic problems with fixed and optimally stopped horizon*, [In:] *Probability in action*, ed. by Łagodowski Z., 2015, p. 33–45.
- [21] Kozłowski E., Gola A., Świć A., *Model of production control in Just-in-Time delivery system conditions*, "Advances in Manufacturing Science and Technology", 2014 vol. 38(1), p. 77–88.

-
- [22] Kozłowski E., Gola A., Świć A., Hajduk M., Terkaj W., *A predictive model of Multi-stage production planning for fixe time orders*, "Management and Production Engineering Review", 2014 vol. 5(3), p. 23–32.
- [23] Kulikowski R., *Procesy optymalne i adaptacyjne w układach regulacji automatycznej*, PWN, Warszawa 1965.
- [24] Liptser, R.SH., Shiryaev, A.N., *Statistics of Stochastic Processes*, Springer-Verlag, New York 1978.
- [25] Oksendal B., *Stochastic differential equations. An introduction with applications*, Springer, 2000.
- [26] Rishel R., *An exact formula for a linear quadratic adaptive stochastic optimal control law*, "SIAM Journal on Control and Optimization", 1986 vol. 24(4), p. 667–674.
- [27] Shiryaev, A.N., *Statisticheskij posledovatelnyj analiz. Optimalnyje pravila postanovki* (w j. ros.), Nauka, Moskva 1976.
- [28] Turnau A., *Sterowanie docelowe układami nieliniowymi w czasie rzeczywistym - algorytmy inteligentne i optymalno czasowe*, AGH Uczelniane wydawnictwa naukowo dydaktyczne, Kraków 2002.
- [29] Wiener N., *Cybernetics*, Wiley, New York 1948.
- [30] Zabczyk J., *Chance and decision. Stochastic control in discrete time*, Scuola Normale Superiore, Pisa 1996.
- [31] Zabczyk J., *Zarys matematycznej teorii sterowania*, PWN, Warszawa 1991.

E. Kozłowski