

dr Barbara Pękala
Interdyscyplinarne Centrum
Modelowania Komputerowego
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Uniwersytetu Rzeszowskiego
ul. Pigonia 1, 35-310 Rzeszów

Rzeszów, 10 sierpnia 2018 r.
(Załącznik 2a)

AUTOREFERAT

przedstawiający opis podstawowego osiągnięcia i pozostałego dorobku naukowego
w związku z ubieganiem się o nadanie stopnia doktora habilitowanego

1 Imię i nazwisko

Barbara Pękala

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

13.03.2008 Doktorat, dyscyplina: **matematyka**,
Wydział Matematyki Stosowanej,
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie.
Tytuł rozprawy: *Rachunek macierzy nad kratami*.

01.07.1999 Magisterium, specjalność: **nauczanie matematyki**,
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy,
Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Rzeszowie
(od 01.09.2001 Uniwersytet Rzeszowski).

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

od 01.10.2008 *Adiunkt*, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy,
Interdyscyplinarne Centrum Modelowania Komputerowego,
Uniwersytet Rzeszowski.

01.10.1999 *Asystent*, Wydział Matematyczno-Przyrodniczy,
– Instytut Matematyki,
30.09.2008 Uniwersytet Rzeszowski.

4 Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dn. 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz.U. 2003 nr 65 poz. 595 z późn. zm.)

4.1 Jako osiągnięcie naukowe uzyskane po otrzymaniu stopnia doktora wskazuję

monografię w języku angielskim:

BARBARA PEKALA, Uncertainty Data in Interval-Valued Fuzzy Set Theory. Properties, Algorithms and Applications, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, 2019. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-93910-0>

4.2 Omówienie celu naukowego ww. pracy i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

4.2.1 Cel badań naukowych

Celem prowadzonych przeze mnie badań w ostatnich kilku latach było opracowanie nowych metod inteligencji obliczeniowej konstruowanych dla tzw. danych niepewnych, które rozumię jako dane (wartości pomiarów, preferencji konsumentów lub ekspertów, itp.), które nie mogą być określone za pomocą konkretnej jednej wartości liczbowej, dlatego wymagają nieklasycznych metod reprezentacji i modelowania. Wymagają zastosowania metod biorących pod uwagę niepewność, np. rachunku przedziałowego. W szczególności skoncentrowałam się na rozważaniach teoretycznych własności przedziałowych zbiorów rozmytych i zastosowaniu ich do różnych problemów decyzyjnych przy użyciu operatorów agregacji uwzględniających niepewność. Zatem ważna była analiza wybranych metod agregacji, ocena dla nich jakości klasyfikacji oraz analiza własności relacji porządkowania danych w tych procesach decyzyjnych. Co za tym idzie, efektywna reprezentacja niepewności występująca w wielu zagadnieniach decyzyjnych.

W monografii stanowiącej podstawę habilitacji zaprezentowane zostały wyniki badań nad metodami inteligentnymi ukierunkowane na zagadnienie niepewności. Badania przebiegały dwutorowo. Pierwsza część poświęcona była teorii zbiorów rozmytych i ich rozszerzeń, ze szczególnym naciskiem na aspekt wykorzystania teorii agregacji przedziałowych. Zawiera przegląd ważniejszych/wybranych aspektów teoretycznych z zakresu teorii przedziałowych relacji rozmytych oraz nowe wyniki teoretyczne znaczące dla rozwoju zastosowań (rozdział 2). Druga faza badań dotyczyła zastosowań teoretycznych rozważań w postaci nowatorskich algorytmów decyzyjnych opartych na teorii przedziałowych zbiorów rozmytych, które zostały poparte analizą ich skuteczności na rzeczywistych danych, np. medycznych (rozdział 3). Ważnym rezultatem moich badań było stworzenie systemu decyzyjnego wspierającego diagnostykę medyczną w problemie, który zainteresował mnie ze względu na wyjątkową trudność w jego wczesnej diagnostyce, której brak cechuje się statystycznie poważnymi dla zdrowia i życia konsekwencjami. Mianowicie został zaproponowany algorytm dotyczący oszacowania ryzyka chorób sercowo-naczyniowych w najbliższych 10 latach życia pacjenta. Pokazano, że nowatorskie podejście wykorzystujące badane w książce uogólnione złożenie i uogólnioną regułę modus ponens z wykorzysta-

niem najskuteczniejszej agregacji daje lepsze rezultaty dla danych nieprecyzyjnych niż, np. inne znane metody klasyfikacji (zob. rozdział 4.2.2.2).

Motywacją dla wyboru kierunku moich badań była niepewność, która jest problemem w wielu zagadnieniach decyzyjnych, w szczególności w codziennej praktyce medycznej. Niepewność, rozumiana tutaj także jako nieprecyzyjność, ma efektywną reprezentację za pomocą przedziałowych zbiorów rozmytych, co potwierdzają liczne przykłady zastosowań. Gdzie początek i koniec przedziału oznaczają graniczne wartości pomiędzy którymi znajduje się jedna pożądana wartość (ujęcie epistemiczne - źródłem niepewności jest brak precyzyjnej wiedzy) lub cały przedział jest zbiorem danych równie ważnych i stanowiących element większej całości - niepewność w tym przypadku nie wynika z niewiedzy, tylko z samego charakteru zjawiska lub modelowanego obiektu (ujęcie ontyczne - źródłem niepewności jest sam obiekt) [23]. Ponadto w obu tych przypadkach niepewność może mieć wiele znaczeń i rodzajów, a każdy z nich może mieć inny skutek dla decyzji/diagnozy. W szczególności niepewność może być natury obiektywnej (spowodowana złożonością lub naturą zjawiska), subiektywnej (spowodowana osobistą opinią, interpretacją, czy brakiem przekonania decydenta) lub spowodowana niską jakością informacji (niedoskonały układ pomiarowy mierzonej wielkości lub przybliżenie i uproszczenie założeń związanych z metodą i procedurą pomiaru). Dodatkowo z samej natury opisy medyczne są często nieprecyzyjne i niejednoznaczne [35], np. zależą od stosowanego sprzętu medycznego lub interpretacji lekarza.

Taki stan rzeczy wymaga zastosowania nieklasycznych metod modelowania danych i wnioskowania, czyli metod mających na względzie nieprecyzyjność. Zaobserwowałam, że w literaturze brak efektywnych metod obsługujących ten rodzaj nieprecyzyjności w medycynie. Zatem w ramach badań wykorzystałam teorię przedziałowych zbiorów rozmytych. W ramach badań spotkałam się z trudnościami efektywnej reprezentacji niepewności i modelowania decyzji w warunkach niepewności. Problem związany jest z porównywalnością przedziałów reprezentujących niepewność. Dlatego jednym z aspektów moich badań było poszukiwanie optymalnej relacji porównywalności wartości przedziałowych, a w konsekwencji optymalnej dla zastosowań operacji agregacji, negacji, implikacji, złożenia oraz innych operatorów przedziałowych.

Monografia oferuje wszechstronne podejście do analizy, modelowania i zastosowań danych nieprecyzyjnych z wykorzystaniem przedziałowych zbiorów rozmytych. Zawiera zasadnicze rozwinięcie tematyki i wyników opublikowanych w artykułach [6, 7, 8, 9, 24, 27, 43, 50] lub [52] oraz nowe, oryginalne metody wspierające podejmowanie decyzji.

Podsumowując, do głównego osiągnięcia naukowego stanowiącego wkład w rozwój dyscypliny informatyka zaliczam rozwój metod z obszaru inteligencji obliczeniowej, pozwalających na skuteczne podejmowanie decyzji w warunkach niepewności, a w szczególności:

- 1) opracowanie metod reprezentacji i przetwarzania danych w warunkach niepewności z wykorzystaniem przedziałowych zbiorów rozmytych;
- 2) zbadanie uogólnionego złożenia przedziałowych relacji rozmytych oraz zastosowanie go w modelu wnioskowania przybliżonego;
- 3) opracowanie algorytmów decyzyjnych opartych na uogólnionej strukturze preferencji przedziałowych zbiorów rozmytych oraz zaproponowanie uogólnienia własności przedziałowych relacji preferencji typu "reciprocity";
- 4) zaproponowanie uogólnienia reguły odrywania i związanego z nią uogólnionego algorytmu wnioskowania przybliżonego opartego na zbiorach danych niepewnych - przedziałowych zbiorach rozmytych. W konsekwencji zaproponowanie i wdrożenie

systemu wspierającego prognostykę medyczną ryzyka sercowo - naczyniowego i poprawiającego skuteczność diagnostyczną w kontekście innych metod.

4.2.2 Osiągnięte wyniki wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

4.2.2.1. Prace badawcze

W poniższych punktach opiszę wybrane najważniejsze wyniki, na które składa się osiągnięcie naukowe podlegające ocenie. Jak wspomniałam, prace badawcze przebiegały dwutorowo. Pierwsza ścieżka badawcza była poświęcona rozważaniom teoretycznym, a druga polegała na wykorzystaniu metod teoretycznych w praktyce. W szczególności wykorzystanie różnych agregacji w procesach decyzyjnych, gdzie ważnym aspektem były dane niepewne. Zastosowano w rozważaniach przedziałowe zbiory rozmyte w rozumieniu epistemicznym lub ontycznym pozwalające na efektywne uwzględnienie niedoskonałości danych oraz optymalny dobór agregacji.

Teoria agregacji odgrywa coraz większą rolę w rozwiązaniach inżynierskich. W szczególności metody agregacji danych używane są w algorytmach maszynowego uczenia (np. zadaniach regresji, klasyfikacji i analizie skupień), uzupełnianiu informacji brakujących, deduplikacji rekordów w bazach danych czy też radzeniu sobie z dużymi zbiorami danych. Badania w ramach tego kierunku koncentrują się wciąż głównie na spójnikach logicznych: normach trójkątnych, implikacjach lub średnich. Ponadto wartym odnotowania jest fakt, że do tej pory badacze najczęściej rozpatrywali jedynie uogólnienia m.in. norm trójkątnych i średnich dla rozszerzeń teorii zbiorów rozmytych. Zazwyczaj w rachunku przedziałowym badano powyższe operacje zgodnie z porządkiem częściowym dlatego istotnym jest opracowanie metod doboru relacji porządkującej wartości przedziałowe w celu rozwiązania problemu braku porównywalności tych wartości. W wielu bowiem przypadkach zachowanie porządku jest kluczowe. Stosunkowo nowe podejście wprowadzone w 2013 roku [14, 15] sugeruje stosowanie porządku liniowego. Równie ciekawe spojrzenie na relacje porównywalności zaproponowano w ostatnich latach w duchu epistemicznym i ontycznym [34, 55]. Rozpatrywane relacje porównywalności mają istotny wpływ na proponowane operatory agregacji. Kluczowe dla moich rozważań wykorzystanie operatorów agregujących związane jest z modelowaniem konsensusu w grupowym podejmowaniu decyzji, na przykład OWA operatorów ("Ordered Weighted Average", Yager 1988), które z kolei są zbieżne z całkami Choqueta (Choquet 1953) i są z powodzeniem stosowane w wielu praktycznych zastosowaniach, a zainteresowanie nimi nieustannie rośnie. Ważniejsze monografie na temat klasycznej teorii agregacji to [4, 32]. Znane są już także wybrane wyniki m.in. dotyczące agregacji intuicjonistycznych zbiorów rozmytych Atanassova lub przedziałowych zbiorów rozmytych [2, 3].

Analiza teoretycznych własności funkcji agregujących jest pomocna w wyborze najbardziej odpowiednich narzędzi tego typu w wybranych obszarach zastosowań. Dobór właściwej funkcji agregacji pozwala polepszyć działanie algorytmów decyzyjnych, nie jest jednak prawdą, że jedna konkretna agregacja będzie sprawdzała się dla wszystkich rodzajów danych.

Perspektywa przyjęta przeze mnie dotyczy głównie formalnego podejścia do podejmowania decyzji przy użyciu teorii przedziałowych zbiorów rozmytych.

Wielokryterialny problem decyzyjny jest jednym z wielu sposobów interpretacji problemu wyszukiwania informacji, w którym wybór odpowiednich operatorów agregujących

może odgrywać ważną rolę w różnych zadaniach związanych z procesem pobierania informacji lub charakteryzujących ten proces. Ponadto wykorzystanie relacji rozmytych i ich rozszerzeń jest powszechnym i koniecznym narzędziem. Argumentowano, że różne rozszerzenia zbiorów rozmytych lepiej wychwytyją różnego rodzaju niepewności niż zbiory rozmyte [16, 40]. Rozszerzenia takie obejmują zbiory rozmyte typu 2, w tym przedziałowe zbiory rozmyte [53, 58].

W książce zatem koncentruję się na przedziałowych operatorach agregacji wykorzystywanych w wielu kwestiach z punktu widzenia teoretycznego i praktycznego. Algorytmy przedstawione w monografii zostały zaimplementowane i wstępnie przetestowane na danych rzeczywistych. Podczas eksperymentów otrzymałam interesujące rezultaty, a w odróżnieniu od prezentowanych w literaturze, podejście z wykorzystaniem agregacji umożliwia dobór odpowiedniej operacji w zależności od rodzaju danych. Jak już wspomniałam ważnym efektem badań było powstanie modelu, który wspiera proces prognozyki ryzyka choroby sercowo-naczyniowej, uwzględniający nieprecyzyjność danych medycznych. Wczesna diagnoza może skutecznie powstrzymać rozwój choroby i uniknąć poważnych powikłań w przyszłości. Zatem znacząco poprawia komfort życia pacjenta. Powody te przyczyniły się do decyzji o stworzeniu modelu, który wspierałby zwłaszcza mniej doświadczonych lekarzy w podjęciu właściwej decyzji diagnostycznej przy zastosowaniu nowoczesnej metody inteligencji obliczeniowej.

W kolejnych punktach omówię wyniki analityczne, które wyprowadziłam i opisałam w pracy będącej osiągnięciem podlegającym ocenie. Wskażę kilka najważniejszych aspektów moich badań i wybrane wyniki.

Opracowanie metod reprezentacji i przetwarzania danych niepewnych z wykorzystaniem przedziałowych zbiorów rozmytych

Ważnym aspektem rozważanym w drugim rozdziale książki jest zagadnienie porównywalności przedziałów reprezentujących niepewność i wykorzystywane następnie w rachunku przedziałowych zbiorów rozmytych. Przedstawię te relacje, które odegrały istotną rolę w późniejszych moich badaniach. Najpierw weźmiemy pod uwagę porządek liniowy obok częściowego i zbadamy ich wpływ na proces agregacji, innych operacji przedziałowych oraz na własności przedziałowych relacji rozmytych.

W wielu zagadnieniach decyzyjnych w warunkach niepewności należy określić metodę porównywania przedziałowych wartości.

Porządek częściowy. Dobrze znana relacja porównywalności przedziałów ma formę

$$x \leq_{L^I} y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2,$$

gdzie $x = [x_1, x_2], y = [y_1, y_2] \in L^I$, $L^I = \{[x_1, x_2] : x_1, x_2 \in [0, 1], x_1 \leq x_2\}$.

Rodzina wszystkich przedziałów L^I z relacją \leq_{L^I} jest zbiorem częściowo uporządkowanym (zwrotność, antysymetria i przechodniość), ponadto jest krata.

Natomiast w pracy [14] wprowadzono pojęcie "admissible". Powiemy, że relacja \leq (\leq_{Adm}) na L^I jest "admissible", jeśli jest liniowa i spełnia $x \leq_{L^I} y \Rightarrow x \leq y$ dla $x, y \in L^I$.

Porządek liniowy wykorzystujący funkcje agregacji. Niech $B_1, B_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ będą ciągłymi funkcjami agregacji takimi, że dla wszystkich $x = [x_1, x_2], y = [y_1, y_2] \in L^I$ równości $B_1(x_1, x_2) = B_1(y_1, y_2)$ i $B_2(x_1, x_2) = B_2(y_1, y_2)$ zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$. Porządek $\leq_{B_{1,2}}$ na L^I zdefiniowany następująco

$$x \leq_{B_{1,2}} y \Leftrightarrow B_1(x_1, x_2) < B_1(y_1, y_2) \text{ lub } (B_1(x_1, x_2) = B_1(y_1, y_2) \text{ i } B_2(x_1, x_2) \leq B_2(y_1, y_2)) \quad (1)$$

jest admissible.

Przykładami liniowych porządków na zbiorze L^I są:

- Porządek leksykograficzny typu pierwszego \leq_{lex1} : $x \leq_{lex1} y \Leftrightarrow x_1 < y_1$ lub $(x_1 = y_1 \wedge x_2 \leq y_2)$.
- Porządek leksykograficzny typu drugiego \leq_{lex2} : $x \leq_{lex2} y \Leftrightarrow x_2 < y_2$ lub $(x_2 = y_2 \wedge x_1 \leq y_1)$.

Porządki \leq_{Lex1} oraz \leq_{Lex2} są szczególnymi przypadkami $\leq_{B_{1,2}}$.

Porównywalność przedziałów w sensie "possibility" (\diamond) i "necessity" (\square). Ponadto zbadalam relacje możliwości "possibility" i konieczności "necessity" w zakresie porównywalności wartości przedziałowych, które wiążą się z epistemiczną i ontyczną koncepcją przedziałów i mają postać:

$$[x_1, x_2] \preceq_{\pi} [y_1, y_2] \Leftrightarrow x_1 \leq y_2,$$

$$[x_1, x_2] \preceq_{\nu} [y_1, y_2] \Leftrightarrow x_2 \leq y_1.$$

Możemy zauważyć, że relacja \preceq_{π} jest porządkiem przedziałowym (spełnia własność zupełności i Ferrersa) w zbiorze L^I . Natomiast relacja \preceq_{ν} jest relacją antysymetryczną i przechodnią w L^I .

Agregacje przedziałowe. Powyższe relacje porównywalności przedziałów prowadzą do różnych metod konstrukcji agregacji. Badałam własności poszczególnych klas agregacji. W szczególności podałam warunki na to aby zaproponowana operacja dekomponowalna [22] F ($F : (L^I)^2 \rightarrow L^I$, $F(x, y) = [F_1(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)]$, gdzie $F_1, F_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$) była bisymetryczną, idempotentną, rozdzielną względem drugiej dekomponowalnej operacji lub normą, konormą trójkątną (działanie rosnące, łączne, przemienne, z elementem neutralnym $\mathbf{1}=[1,1]$ lub $\mathbf{0}=[0,0]$, odpowiednio) bądź agregacją.

Operację $\mathcal{A} : (L^I)^n \rightarrow L^I$ nazywamy przedziałową agregacją [59, 36], jeśli jest rosnąca ze względu na \leq (częściowy lub liniowy porządek) oraz

$$\underbrace{\mathcal{A}(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})}_{n \times} = \mathbf{0}, \quad \underbrace{\mathcal{A}(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1})}_{n \times} = \mathbf{1}.$$

Jedną z klas agregacji przedziałowych intensywnie wykorzystywaną w aplikacjach $\mathcal{A} : (L^I)^2 \rightarrow L^I$ jest szczególny przypadek operacji dekomponowalnych, czyli reprezentowalna przedziałowa agregacja zgodna z porządkiem częściowym \leq_{L^I} (badana m.in. w pracy [20]). \mathcal{A} jest reprezentowalna, jeśli dwie agregacje $A_1, A_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dla każdego $x, y \in L^I$ i $A_1 \leq A_2$ spełniają warunek $\mathcal{A}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = [A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)]$.

Przykładami reprezentowalnych agregacji przedziałowych są \wedge i \vee w L^I zdefiniowane odpowiednio dla $A_1 = A_2 = \min$ w pierwszym przypadku i dla $A_1 = A_2 = \max$ w drugim. Ale reprezentowalność to tylko jedna z możliwych klas agregacji przedziałowych. Jest wiele innych, np. funkcja $\mathcal{A} : (L^I)^2 \rightarrow L^I$,

$$\mathcal{A}_1(x, y) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{jeśli } (x, y) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \\ [0, A(x_1, y_2)], & \text{poza tym} \end{cases}$$

jest agregacją na L^I (nie reprezentowalną) zgodną z \leq_{L^I} , gdzie A jest funkcją agregacji.

Gdy $A_1, A_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, $A_1 \leq A_2$ będą agregacjami. Wtedy agregacja \mathcal{A} na zbiorze L^I jest nazywana (por. [20]) pseudomax $A_1 A_2$ - reprezentowalną, jeśli $\mathcal{A}(x, y) = [A_1(x_1, y_1), \max(A_2(x_1, y_2), A_2(x_2, y_1))]$ i pseudomin $A_1 A_2$ -reprezentowalną, jeśli $\mathcal{A}(x, y) = [\min(A_1(x_1, y_2), A_1(x_2, y_1)), A_2(x_2, y_2)]$.

Ponadto opracowałam nowe metody konstrukcji agregacji przy różnych porządkach liniowych. Przykładowo

$$\mathcal{A}_2(x, y) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{jeśli } (x, y) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \\ [0, A(x_1, y_1)], & \text{poza tym} \end{cases}$$

jest przedziałową agregacją (nie reprezentowalną) zgodną z \leq_{Lex1} , gdzie A jest funkcją agregacji. Natomiast

$$\mathcal{A}_3(x, y) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{jeśli } (x, y) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ [A(x_2, y_2), 1], & \text{poza tym} \end{cases}$$

jest przedziałową agregacją (nie reprezentowalną) zgodną z \leq_{Lex2} , gdzie A jest funkcją agregacji.

Kolejne klasy agregacji, które stosowałam, to nowe klasy agregacji związane z relacjami \preceq_π i \preceq_ν . Przypomnijmy, że operacja $\mathcal{A} : (L^I)^n \rightarrow L^I$ jest nazywana [10]

- agregacją możliwości (pos-agregacją) jeśli $\mathcal{A}(\underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{n \times}) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}(\underbrace{\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}}_{n \times}) = \mathbf{1}$ oraz

$$\forall x_i, y_i \in L^I x_i \preceq_\pi y_i \Rightarrow \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) \preceq_\pi \mathcal{A}(y_1, \dots, y_n),$$

- agregacją konieczności (nec-agregacją) jeśli $\mathcal{A}(\underbrace{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}_{n \times}) = \mathbf{0}$, $\mathcal{A}(\underbrace{\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}}_{n \times}) = \mathbf{1}$ oraz

$$\forall x_i, y_i \in L^I x_i \preceq_\nu y_i \Rightarrow \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) \preceq_\nu \mathcal{A}(y_1, \dots, y_n).$$

Następujące przedziałowe agregacje (nie reprezentowalne) są pos-agregacjami (ale nie nec-agregacjami):

$$\mathcal{A}_{\pi 1}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{jeśli } (x, y) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \\ [\frac{y_1 + x_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}], & \text{poza tym,} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{\pi 2}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{jeśli } (x, y) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \\ [\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}], & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Natomiast następująca operacja jest nec-agregacją (to jest pseudomax $A_1 A_2$ - reprezentowalną agregacją) ale nie pos-agregacją:

$$\mathcal{A}_\nu(x, y) = [\frac{x_1 + y_1}{2}, \max(\frac{x_1 + y_2}{2}, \frac{x_2 + y_1}{2})].$$

Przykładowymi własnościami, które badałam dla powyższych klas agregacji, to bisymetria, łączność, przemienność, rozdzielność, dominacja oraz NC(N) ("non-contradiction principle") lub EM(N) ("excluded-middle principle").

Ponadto zwróćmy uwagę, że użycie agregacji możliwości i konieczności oraz operatora OWA w systemie "OvaExpert" [26] dało bardzo dobre rezultaty. Mianowicie obniżony został koszt błędnych decyzji w zagadnieniu diagnostyki postaci guzów jajników [11]. Co sugeruje, że także dla innych typów danych w zagadnieniach decyzyjnych operacje te mogą być efektywne.

IVOWA operator. Jak już wspomniałam OWA ("Ordered Weight Average") operator jest ważnym z punktu widzenia problemu podejmowania decyzji i dla danych nieprecyzyjnych przyjmuje postać: Niech \leq będzie porządkiem admissible na L^I i niech

$w = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$, $w_1 + \dots + w_n = 1$.

Przedziałowy OWA operator (IVOWA) [15] związany z porządkiem \leq jest operacją $IVOWA_{\leq, w} : (L^I)^n \rightarrow L^I$,

$$IVOWA_{\leq, w}([a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot [a_{(i)}, b_{(i)}],$$

gdzie $[a_{(i)}, b_{(i)}]$, $i = 1, \dots, n$, oznacza i -tą największą wartość według \leq oraz $w \cdot [a, b] = [wa, wb]$, $[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$.

Zwróćmy uwagę, że $IVOWA_{\leq, w}$ nie jest przedziałową agregacją zgodnie z \leq_{LI} . Ale przy zastosowaniu odpowiedniego porządku liniowego (zob. (1)) otrzymujemy po pierwsze agregację, a po drugie wykazałam, że dla klas agregacji równoważnych ($A_i \sim B_i$, gdy $A_i(x, y) \leq A_i(z, t) \Leftrightarrow B_i(x, y) \leq B_i(z, t)$) użytych do konstrukcji operatorów OWA zachowują one porządek alternatyw dla danego zagadnienia decyzyjnego.

Ponadto operator IVOWA dał bardzo dobre rezultaty w przykładzie aplikacyjnym dotyczącym diagnostyki medycznej (zob. rozdział 4.2.2.2).

Ważną częścią moich badań była analiza klas przedziałowych relacji rozmytych, rozważenie ich własności w zależności od przyjętego porządku/relacji porównywalności. Przypomnijmy, że przedziałową relacją rozmytą na zbiorze $X \times Y$ jest $R : X \times Y \rightarrow L^I$ (zob. [53, 58]) i $R(x, y) = [\underline{R}(x, y), \overline{R}(x, y)]$, gdzie $\underline{R}, \overline{R} : X \times Y \rightarrow [0, 1]$. Oznaczmy klasę przedziałowych relacji rozmytych na X, Y przez $IVFR(X \times Y)$ lub $IVFR(X)$ dla $X = Y$.

W centrum mojej uwagi były własności trzech klas:

- $(IVFR(X \times Y), \leq)$, gdzie relację częściowego porządku \leq dla $R, S \in IVFR(X \times Y)$ określamy następująco $R \leq S \Leftrightarrow \forall_{(x, y) \in X \times Y} R(x, y) \leq S(x, y)$, gdzie druga operacja \leq w L^I jest porządkiem częściowym \leq_{LI} lub liniowym \leq_{Adm} z elementami minimalnym i maksymalnym 0 oraz 1 , odpowiednio.
- $(IVFR(X \times Y), \preceq_\pi)$ i $(IVFR(X \times Y), \preceq_\nu)$, gdzie $R \preceq_\pi S \Leftrightarrow \underline{R} \leq \overline{S}$ i $R \preceq_\nu S \Leftrightarrow \overline{R} \leq \underline{S}$, były nie zbadanymi dotychczas klasami związanymi z epistemicznym i ontycznym pojęciem przedziałów.

Zbadanie uogólnionego złożenia przedziałowych relacji rozmytych

Badane własności agregacji były inspiracją dla badań nad ważnym elementem moich badań teoretycznych, czyli zagadnieniem uogólnionego złożenia przedziałowych relacji rozmytych w pierwszej z ww. klas. Dotychczasowe rozważania spotykane w literaturze zawierają własności złożenia Zadeha typu $\max - \min$ lub ogólniejszych $\max - T$ oraz $S - T$, gdzie przez S oznaczamy konormę trójkątną, a przez T normę trójkątną. W moich badaniach skoncentrowałam się natomiast na rozważeniu własności złożenia typu: $\sup - \mathcal{B}$, $\inf - \mathcal{B}$, oraz $\mathcal{A} - \mathcal{B}$, gdzie \mathcal{A}, \mathcal{B} są agregacjami przedziałowymi.

Złożenie przedziałowych relacji rozmytych. Dla dowolnych, niepustych zbiorów X, Y, Z , wzorując się na [31], definiujemy dla $P \in IVFR(X \times Y)$, $R \in IVFR(Y \times Z)$ i \mathcal{B} będącą przedziałową agregacją:

- Złożenie $\sup - \mathcal{B}$ relacji P i R jest relacją $P \circ_{\sup \mathcal{B}} R \in IVFR(X \times Z)$, gdzie

$$(P \circ_{\sup \mathcal{B}} R)(x, z) = \sup_{y \in Y} \mathcal{B}(P(x, y), R(y, z)).$$

- Złożenie $\inf - \mathcal{B}$ relacji P i R jest relacją $P \circ_{\inf \mathcal{B}} R \in IVFR(X \times Z)$, gdzie

$$(P \circ_{\inf \mathcal{B}} R)(x, z) = \inf_{y \in Y} \mathcal{B}(P(x, y), R(y, z)).$$

W odróżnieniu od badań nad złożeniami $S - T$ lub $\sup - *$, dla których możemy odnaleźć pewne rezultaty w pracach [21, 12, 43, 51] zbadalam ogólniejsze złożenie, w przypadku reprezentacji skończonego zbioru danych, czyli z dwiema agregacjami przedziałowymi.

Wtedy dla zbiorów skończonych $X, Y, Z \neq \emptyset$, czyli $\text{card}(X) = m$, $\text{card}(Y) = n$, $\text{card}(Z) = p$ i przedziałowych agregacji $\mathcal{A} : (L^I)^n \rightarrow L^I$, $\mathcal{B} : (L^I)^2 \rightarrow L^I$ zgodnych z tym samym porządkiem \leq (częściowym lub liniowym) mamy złożenie $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ relacji P i R jest relacją $P \circ_{\mathcal{A}\mathcal{B}} R \in \text{IVFR}(X \times Z)$, gdzie

$$(P \circ_{\mathcal{A}\mathcal{B}} R)_{ik} = \mathcal{A}_{j=1}^n(\mathcal{B}(P_{ij}, R_{jk})).$$

Rozważyłam własności półgrupowe powyższych złożzeń przedziałowych relacji rozmytych, takie jak monotoniczność, łączność, istnienie elementu neutralnego, rozdzielność. W szczególności pokazałam, że dla łącznej nieskończonej rozdzielnej względem \vee (\wedge) agregacji \mathcal{B} struktura $(\text{IVFR}(X), \circ_{\vee\mathcal{B}})$ ($(\text{IVFR}(X), \circ_{\wedge\mathcal{B}})$) jest półgrupą. Natomiast dla bi-symetrycznej rozszerzonej agregacji [30] \mathcal{A} ($\mathcal{A} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (L^I)^n \rightarrow L^I$) i agregacji \mathcal{B} łącznej, rozdzielnej względem \mathcal{A} struktura $(\text{IVFR}(X), \circ_{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ jest półgrupą na zbiorze skończonym.

We wspomnianych półgrupach rozważyłam własności potęg przedziałowych relacji rozmytych i ich zależności ze złożeniami oraz innymi operacjami, np. agregacjami i domknięciami górnymi lub dolnymi.

Własności przedziałowych relacji rozmytych. Kolejnym ważnym zagadnieniem, z punktu widzenia zastosowań, było rozważenie własności przedziałowych relacji rozmytych. Zaproponowałam i zbadalam własności definiowanych za pomocą agregacji (np. przechodniość, własność Ferrersa, antysymetria lub zupełność). Rozważane własności są uogólnioną wersją znanych z literatury [28], a bazujących na operacjach minimum, maksimum lub później norm i konorm trójkątnych. Badałam proces zachowywania nowych własności podczas operacji agregacji, złożenia, potęgowania, domknięcia lub przez operatory Atanassova. Ważną częścią badań było generowanie klas relacji o zadanej własności przy pomocy relacji równoważności " \sim " ($R \sim S \Leftrightarrow (R(x, y) \leq R(u, v) \Leftrightarrow S(x, y) \leq S(u, v))$). Ponadto dla własności, które nie posiadały w klasie relacji równoważnych tej samej własności, czyli zwrotność, asymetria lub spójność, osłabienie tych własności okazało się konieczne - wprowadzenie "localy properties". Wspomniane własności odgrywają istotną rolę w redukcji obrazów wykorzystującą miary podobieństwa, a relacja " \sim " otwiera tam nowe możliwości.

Zwróciłam szczególną uwagę na własność przechodniości (definiowaną przy porządku częściowym i liniowym) ponieważ odgrywa ważną rolę w gwarantowaniu spójności relacji preferencji. Zapewnienie spójności ma natomiast ogromne znaczenie w podejmowaniu decyzji, ponieważ niespójne informacje podane przez decydenta mogą prowadzić do wyboru nieodpowiedniej (nieintuicyjnej) alternatywy. Ważnym aspektem tych badań było nowatorskie ujęcie przechodniości przy uwzględnieniu przedziałowego porządku liniowego.

Ponadto interesującym, a zarazem dotychczas nie rozważanym, pod względem interpretacji jest spojrzenie epistemiczne i ontyczne (możliwość i konieczność) na wspomniane własności przedziałowych relacji rozmytych związane z adekwatnymi metodami porównywalności przedziałów w duchu logiki modalnej. Pokazałam między innymi zachowywanie odpowiedniej przechodniości przez reprezentowalną agregację:

- Jeśli w agregacji $\mathcal{A} = [A_1, A_2]$ A_1 dominuje B , to \mathcal{A} zachowuje pos- B -przechodniość, czyli $B(A_1(\underline{R}_1(x, y), \dots, \underline{R}_n(x, y)), A_1(\underline{R}_1(y, z), \dots, \underline{R}_n(y, z))) \leq A_2(\overline{R}_1(x, z), \dots, \overline{R}_n(x, z))$.

Natomiast

- Jeśli w agregacji $\mathcal{A} = [A_2, A_1]$ A_2 dominuje B , to \mathcal{A} zachowuje nec- B -przechodniość, czyli $B(A_2(\overline{R}_1(x, y), \dots, \overline{R}_n(x, y)), A_2(\overline{R}_1(y, z), \dots, \overline{R}_n(y, z))) \leq A_1(\underline{R}_1(x, z), \dots, \underline{R}_n(x, z))$.

Efektami badań nad tymi nowymi własnościami oraz konstrukcji pos- i nec-agregacji są nowe algorytmy generowania relacji o ww. własnościach, w szczególności pos- B -przechodność i nec- B -przechodność i użycie ich w algorytmach podejmowania decyzji (rozdział 3).

Opracowanie algorytmów decyzyjnych opartych na uogólnionej strukturze preferencji przedziałowych zbiorów rozmytych oraz uogólnionej własności "reciprocity"

"Podejmowanie decyzji jest wszechobecną, najważniejszą czynnością człowieka, a także inteligentnych systemów, które próbują naśladować ludzkie zachowania, procesy wnioskowania i wyboru" [33]. Mamy do czynienia z wieloma typami decyzji, w szczególności z szeroko pojętym podejmowaniem decyzji w warunkach niepewności. Zastosowanie przedziałowych relacji rozmytych do reprezentowania niepewności w decyzji zwiększa elastyczność w radzeniu sobie z problemami, gdy zbiory rozmyte zawodzą [1, 7, 9, 37]. W wielu aplikacjach decyzyjnych konieczne staje się agregowanie kilku zbiorów rozmytych, w szczególności, gdy zbiory rozmyte służą do wyrażania preferencji (np. [57]).

W warunkach niepewności, czyli stosując zbiory rozmyte typu 2, analogicznie jak w klasycznym sformułowaniu problemu grupowego podejmowania decyzji rozważamy zestaw możliwych alternatyw $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ i grupę ekspertów $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, którzy wyrażają swoje opinie na temat tych alternatyw. Chcąc uzyskać wspólną decyzję wykorzystujemy przedziałowe relacje rozmyte R_1, \dots, R_m na zbiorze X odpowiadające każdemu kryterium danego eksperta. W wielu sytuacjach decydent (ekspert, system) boryka się z problemami niepełnych bądź nieprecyzyjnych informacji, na podstawie których potrzebuje podjąć decyzję. Jeśli źródło decyzji/preferencji ma luki w danych wejściowych może być konieczne reprezentowanie jej za pomocą przedziału. Innymi słowy przedział oznacza górną i dolną granicę dla możliwych decyzji/preferencji danego źródła. Ponadto w przypadku niektórych danych dokładna wartość nie jest możliwa do przedstawienia, a przedział dla takich danych, zawiera wartość opinii eksperta. Takie przedziały reprezentują epistemiczną wiedzę, tj. zawierają dokładną wartość decyzji, jaką podjęłoby źródło jeśli miałoby pełną wiedzę. Wtedy relację R , tak zwaną słabą relacją preferencji, możemy interpretować następująco: $R_{ij} = R(x_i, x_j) = [0.5, 0.5]$ oznacza obojętność między x_i i x_j ($x_i \sim x_j$), $R_{ij} >_{LI} [0.5, 0.5]$ oznacza, że x_i jest ściśle preferowana wobec x_j ($x_i \succ x_j$), a $R_{ij} = [1, 1]$ oznacza, że x_i jest bezwzględnie preferowane względem x_j . Dla wartości przedziałowych możemy uzyskać nieporównywalność pomiędzy stopniem preferencji R_{ij} , a wartością $[0.5, 0.5]$. Zatem rozważanie różnych porządków liniowych lub możliwości i konieczności jest uzasadnione.

Kwestia preferencji jest ważnym aspektem problemu decyzyjnego. Jestem szczególnie zainteresowana technikami wykorzystywania do dekompozycji (słabej) relacji preferencji do struktury preferencji składającej się ze ścisłej preferencji P , obojętności I i relacji nieporównywalności J .

Na bazie słabej relacji preferencji R (wzorując się na [28, 18]) konstruuję następujące relacje:

1. Ścisłą relację preferencji $P_{ij} = P(x_i, x_j)$, która reprezentuje miarę ścisłej preferencji x_i nad x_j , wskazującą, że x_i (słabo) preferuje x_j , ale x_j nie (słabo) preferuje x_i ;
2. Relację obojętności $I_{ij} = I(x_i, x_j)$, która oznacza miarę jednoczesnego spełnienia R_{ij} i R_{ji} . Innymi słowy x_i i x_j są uważane za równie dobre;
3. Relację nieporównywalności $J_{ij} = J(x_i, x_j)$ mówiącą o braku porównywalności x_i z x_j . Fodor i Roubens [28] zaproponował dla relacji rozmytych następującą metodę konstrukcji

struktury preferencji za pomocą normy trójkątnej T i ścisłej negacji N :

$$P_{ij} = T(R_{ij}, N(R_{ji})), \quad I_{ij} = T(R_{ij}, R_{ji}), \quad J_{ij} = T(N(R_{ij}), N(R_{ji}))$$

dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Rozmyta struktura preferencji (P, I, J) była badana w wielu pracach (np. [29, 41, 42] lub [13] przy zastosowaniu funkcji "grouping" lub "overlap"). Ze względu na problem z niepewnością rozważane są szeroko przedziałowe relacje preferencji $R(x_i, x_j) = R_{ij} = [\underline{R}_{ij}, \overline{R}_{ij}]$, gdzie stopień preferencji x_i nad x_j jest reprezentowany przez przedział. Alternatywą do metod konstrukcji dla przedziałowej słabej relacji preferencji R struktury preferencji prezentowanej i zbadanej w pracy [1] (przy pomocy przedziałowej t-normy T_{IV} oraz reprezentowalnej negacji przedziałowej N_{IV} generowanej ze standardowej negacji rozmytej) jest zaproponowana przeze mnie struktura wykorzystująca dwie przedziałowe agregacje \mathcal{A} i \mathcal{B} zamiast norm trójkątnych:

- przedziałowa ścisła relacja preferencji

$$P_{ij} = \mathcal{A}(R_{ij}, N_{IV}(R_{ji})), \quad (2)$$

- przedziałowa relacja obojętności

$$I_{ij} = \mathcal{B}(R_{ij}, R_{ji}), \quad (3)$$

- przedziałowa relacja nieporównowalności

$$J_{ij} = \mathcal{B}(N_{IV}(R_{ij}), N_{IV}(R_{ji})) \quad (4)$$

dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Wyniki związane ze strukturą preferencji oraz związane z wybranymi własnościami przedziałowych relacji rozmytych zostały wykorzystane w algorytmach podejmowania decyzji (rozdział 3).

Szczególnym przypadkiem relacji preferencji jest relacja typu "reciprocity". Założenie reciprocity jest często używane w odniesieniu do relacji preferencji zarówno w przedziałowym [1, 56], jak i klasycznym środowisku rozmytym [17]. Moim celem było wprowadzenie i zbadanie własności reciprocity opartej na negacji rozmytej, która oznacza, że zamiast stosować standardową negację w definicji reciprocity, stosujemy dowolną rozmytą negację. Wtedy przedziałowa relacja preferencji R ma własność reciprocity ("N-reciprocity"), gdy spełnia

$$R_{ii} = [0.5, 0.5], \quad R_{ji} = N_{IV}(R_{ij}) = [N(\overline{R}_{ij}), N(\underline{R}_{ij})]$$

dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ i $R_{ij} = [\underline{R}_{ij}, \overline{R}_{ij}] \in L^I$, gdzie $N_{IV} = [N, N]$ jest przedziałową negacją (operacja malejąca i spełniająca $N_{IV}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$, $N_{IV}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$).

To pojęcie jest uogólnieniem własności reciprocity wprowadzonej w pracy [56], gdzie N było standardową negacją, czyli $N(x) = 1 - x$. Reciprocity pojawia się w relacjach preferencji jako naturalne założenie. Jednak założenie $R_{ji} = 1 - R_{ij}$ dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$ jest bardzo silnym i często nie spełnianym przez decydentów w rzeczywistych sytuacjach. Dlatego używamy dowolnej rozmytej negacji zamiast standardowej negacji.

Jako rozszerzenie rezultatów z pracy [1] możemy zaobserwować, że dla N -reciprocal $R \in IVFR(X)$ i ścisłej relacji P_{ij} skojarzonej według (2) z R mamy $P_{ij} = R_{ij}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentowalna przedziałowa agregacja \mathcal{A} jest idempotentna.

Ponadto rozważyłam zagadnienie zachowywania własności reciprocity przez funkcję agregacji (różne reprezentacje), przez złożenie przedziałowych relacji rozmytych oraz inne operacje. Zachowanie tej własności podczas agregacji ma istotne znaczenie w wielokryterialnym podejmowaniu decyzji. Następujący rezultat charakteryzuje agregację zachowującą N -reciprocitę, gdzie obserwujemy istotny wpływ granicznego punktu stopnia preferencji, czyli $[0.5, 0.5]$, która formuje punkt stały negacji i agregacji.

- Jeśli N jest silną negacją z punktem stałym 0.5 , a $\mathcal{A} : (L^I)^2 \rightarrow L^I$ jest reprezentowalną agregacją $\mathcal{A}([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = [A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)]$ dla agregacji $A_1, A_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, wtedy \mathcal{A} zachowuje N -reciprocitę wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1 = A_2^N$ i A_1, A_2 mają punkt stały 0.5 , tj. $A_1(0.5, 0.5) = 0.5$, $A_2(0.5, 0.5) = 0.5$ i $A_1(x, y) = N(A_2(N(x), N(y)))$.

Również pseudomax - i pseudomin - agregacje mogą zachowywać własność N -reciprocitę.

- Jeśli N jest silną negacją z punktem stałym 0.5 , i agregacje $A_1, A_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ takie, że $A_2 = A_1^N$ mają punkt stały 0.5 oraz A_2 jest maxitive, czyli $\max(A_2(t_1, \dots, t_n), A_2(s_1, \dots, s_n)) = A_2(\max(t_1, s_1), \dots, \max(t_n, s_n))$, wtedy pseudomax $A_1 A_2$ -reprezentowalna agregacja zachowuje N -reciprocitę.

Analogiczny rezultat otrzymujemy dla pseudomin $A_1 A_2$ -reprezentowalnej agregacji.

Rozważyłam także zależności własności N -reciprocitę z przechodnością. Biorąc pod uwagę znaczenie przechodności badałam różne wersje tej własności. Z punktu widzenia preferencji szczególnie interesująca jest słaba przechodność, czyli $R \in IVFR(X)$ jest słabo przechodnia, jeśli dla $x, y, z \in X$ spełnia

$$R(x, z) \geq [0.5, 0.5], R(z, y) \geq [0.5, 0.5] \Rightarrow R(x, y) \geq [0.5, 0.5].$$

- Dla reprezentowalnej przedziałowej negacji $N_{IV} = [N, N]$ i $N(0.5) \leq 0.5$ wykazałam, że jeżeli $R \in IVFR(X)$ jest przedziałową relacją rozmytą o własności N -reciprocitę silnie dominującą dolną (górną) trójkątną, to jest słabo przechodnią, gdzie R jest silnie dominującą dolną (górną) trójkątną relacją, gdy dla $1 \leq i, j \leq n$, $i < j$ ($i > j$) jest spełniony warunek $R_{ij} > [0.5, 0.5]$.

Ponadto rozważania zależności N -reciprocitę i różnych rodzajów przechodności zostały uwieńczone kilkoma przykładowymi algorytmami decyzyjnymi wykorzystującymi nową uogólnioną strukturę preferencji, normalizację do N -reciprocitę oraz różne przechodności przy uwzględnieniu także różnych metod porównywalności wartości przedziałowych, ponadto różne agregacje przedziałowe, w tym także IVOWA operator z porządkiem liniowym. Wykazałam, że IVOWA operator zachowuje własność N -reciprocitę dla standardowej negacji N . Poza tym metody, które testowałam to "voting method" (z wykorzystaniem nowej struktury preferencji) i "non-dominance method" (z wykorzystaniem nowej metody konstrukcji ścisłej relacji preferencji i niestandardowej negacji oraz liniowych porządków przedziałowych). Algorytmy te są uogólnieniem znanych algorytmów (Voting Method, z OWA operatorem, czy Non-dominance z negacją standardową) uwzględniają brak porównywalności przedziałów (porządki liniowe) oraz koncepcje epistemiczne lub ontyczne (porządki możliwości i konieczności) i zostały wstępnie przetestowane na danych rzeczywistych.

Opracowanie algorytmu wnioskowania przybliżonego

Przybliżone rozumowanie jest procesem lub procesami, w których możliwy jest nieprecyzyjny wniosek wywodzący się ze zbioru nieprecyzyjnych przesłanek [12] i takie jest w centrum mojej uwagi przy zastosowaniu przedziałowych relacji rozmytych.

Klasyczny schemat reguły odrywania ("modus ponens"), który brzmi następująco

Przesłanka: $D \rightarrow E$

Fakt: D

E ,

został rozszerzony do rozumowania rozmytego z wartościami przedziałowymi dając uogólnioną regułę odrywania.

Uogólniona reguła odrywania (General Modus Ponens). Schematy wnioskowania przybliżonego są często realizowane przez regułę Zadeha opartą na złożeniu sup-T i implikacji. Analiza symulacji operacji na danych medycznych w następnej części auto-referatu było inspiracją i motywacją dla mnie do zaproponowania i zbadania uogólnienia rozważań z prac [38, 39] lub [59]. Wtedy złożenie $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ w odniesieniu do agregacji przedziałowych prowadzi do idei poniższej nierówności funkcjonalnej i uogólnienia modus ponens.

Zbadałam przy jakich założeniach o agregacjach przedziałowych spełniona jest uogólniona reguła odrywania w warunkach niepewności:

Powiemy, że \mathcal{A}_2 spełnia własność modus ponens względem \mathcal{A}_1 , gdy

$$\mathcal{A}_1(x, \mathcal{A}_2(N_{IV}(x), y)) \leq y,$$

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ są przedziałowymi agregacjami i $x, y \in L^I$.

W praktyce rozważamy n-regułę, w konsekwencji badano algorytm wielowartościowego wnioskowania przybliżonego z niepewnością:

R_1 : Jeżeli x jest \mathcal{D}_1 to y jest \mathcal{E}_1

R_2 : Jeżeli x jest \mathcal{D}_2 to y jest \mathcal{E}_2

.....

R_n : Jeżeli x jest \mathcal{D}_n to y jest \mathcal{E}_n

fakt : x jest \mathcal{D}'

y jest \mathcal{E}' ,

gdzie $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n, \mathcal{D}' \in IVFS(X)$, $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n, \mathcal{E}' \in IVFS(Y)$.

Wykorzystując:

- uogólnione złożenia przedziałowych relacji rozmytych oraz
- uogólnioną regułę odrywania w warunkach niepewności (dla przedziałów niepewności, czyli gdy przesłanki są wartościami przedziałowymi - przedziałami niepewności, zatem uzyskany wniosek również)

konstruujemy następujący algorytm:

Algorytm GeneralApproximateReasoning

Dane wejściowe: Przesłanki $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n, \mathcal{D}' \in IVFS(X)$; Wnioski $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \in IVFS(Y)$;
Przedziałowe funkcje agregacji $\mathcal{A}, \mathcal{A}_k, k \in \{1, 2, 3\}$;

Dane wyjściowe: \mathcal{E}' ;

- 1) Dla każdej reguły budujemy powiązaną przedziałową relację rozmytą R_i , gdzie $R_i \in IVFR(X \times Y)$,

$$R_i(x, y) = \mathcal{A}_2(N_{IV}(\mathcal{D}_i(x)), \mathcal{E}_i(y))$$

dla $i = 1, \dots, n$, \mathcal{A}_2 jest przedziałową agregacją i N_{IV} jest przedziałową negacją;

- 2) Bierzemy przedziałowe funkcje agregacji \mathcal{A} , \mathcal{A}_1 i \mathcal{A}_3 ;
- 3) Dla każdej reguły wyliczamy:

$$\mathcal{E}'_i(y) = \mathcal{A}_{x \in X}(\mathcal{A}_1(\mathcal{D}'(x), R_i(x, y))), \quad i = 1, \dots, n;$$

- 4) Wyznaczamy: $\mathcal{E}' = \mathcal{A}_{3_{i=1, \dots, n}}(\mathcal{E}'_i)$.

4.2.2.2. System prognozowania ryzyka sercowo-naczyniowego

Prace badawcze rozpoczęte zostały we współpracy z grupą doświadczonych lekarzy, którzy zwrócili uwagę na brak łatwo dostępnego (z minimalnym zestawem badań początkowych) systemu diagnostycznego w trudnym diagnostycznie problemie, czyli wyznaczania ryzyka sercowo-naczyniowego w najbliższych 10 latach życia pacjenta. System prognozowania ryzyka sercowo-naczyniowego jest przykładem użycia nowatorskiego uogólnienia reguły wnioskowania oraz uogólnionego złożenia. Wreszcie opisy algorytmów są uzupełnione analizą skuteczności przedstawionych algorytmów, przeprowadzonych na danych pacjentów leczonych w centrach medycznych w Pampelunie. Motywacją do zainteresowania się tym problemem były niepokojące statystyki, gdyż miażdżyca jest procesem złożonym, wieloczynnikowym oraz postępującym. Proces miażdżycy we wczesnym etapie nie daje żadnych symptomów klinicznych, nierzadko pierwszym objawem jest ostry zespół wieńcowy lub udar niedokrwieny mózgu. Bardzo istotne jest zatem oszacowanie ryzyka sercowo-naczyniowego. Choroby sercowo-naczyniowe są często odpowiedzialne za przedwczesną śmierć. Większości tych zgonów można zapobiec poprzez wczesne zastosowanie profilaktyki i ewentualne włączenie leczenia farmakologicznego, po wcześniejszym rozszerzeniu diagnostyki.

Według Głównego Urzędu Statystycznego w 2013 roku aż 45.6% zgonów w Polsce miało podłoże kardiologiczne, a prognozy na kolejne lata wskazują, że w 2040, będzie to już 50% zgonów z powodu chorób sercowo-naczyniowych.

Zaproponowany system wykorzystuje teoretyczne rozważania w przedstawianym problemie i stanowi nowe podejście do wnioskowania przybliżonego. Podnosząc efektywność diagnostyczną, poprawia standard życia wielu pacjentów.

Opis problemu. Opiszę kluczowe elementy, technologie i analizę skuteczności algorytmów stosowanych w systemie w kontekście innych istniejących metod.

Problem polega na przewidywaniu ryzyka cierpienia z powodu choroby sercowo - naczyniowej (CVD) w ciągu najbliższych dziesięciu lat. System może mieć następujące potencjalne zmienne wejściowe: płeć, wiek, cukrzyca, skurczowe i rozkurczowe ciśnienie krwi, całkowity lub cholesterol HDL, dane socjo-demograficzne, fizjologiczne, biochemiczne, genetyczne.

Większość z wymienionych zmiennych wymaga złożonych badań laboratoryjnych co utrudnia lub w wielu przypadkach uniemożliwia diagnostykę. W związku z tym, że głównym celem systemu ma być jego dostępność i szybkość wykorzystania zostały uwzględnione następujące zmienne wejściowe wprowadzone do systemu:

wiek i skurczowe ciśnienie krwi pacjenta.

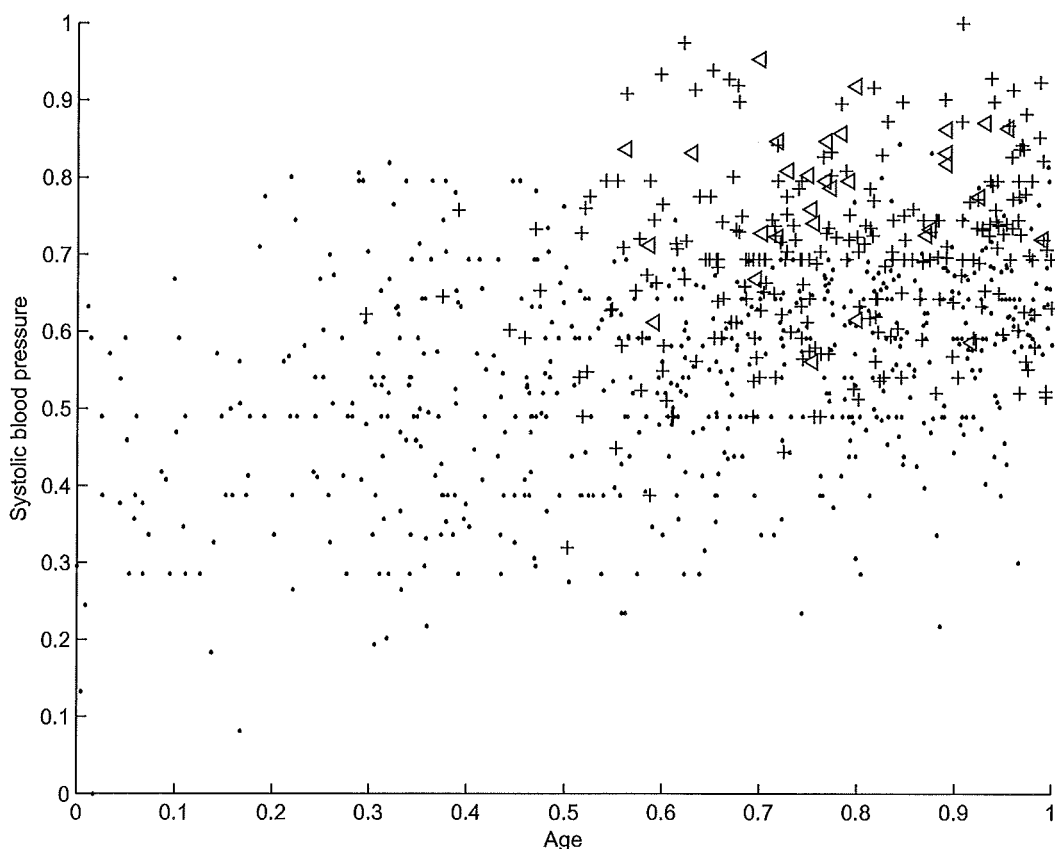
Ze względu na niepewność występującą w diagnostyce medycznej, widzimy konieczność zastosowania modelu opartego na przedziałowych zbiorach rozmytych. Zwróćmy uwagę, że nasze dane wejściowe są także niepewne ze względu na nieprecyzyjność pomiarów (różne aparaty pomiarowe i różne zakłócenia) jak i na niską jakość informacji (brak precyzji - uwarunkowania genetyczne, tryb życia, itp. mają istotny wpływ na tempo "starzenia" się organów).

Rezultatem działania systemu jest **Ryzyko** cierpienia z CVD w następnych dziesięciu latach: **niskie, średnie lub wysokie**.

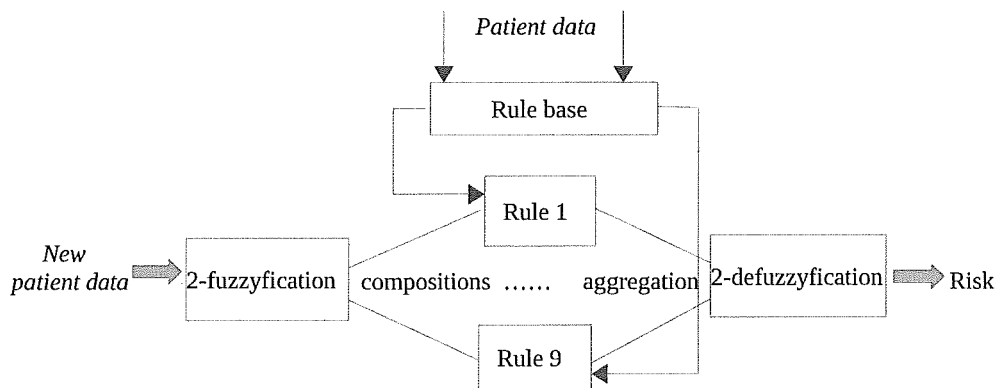
Rozważono zbiór danych obejmujący **898 przypadków klinicznych** uzyskanych z rejestrów siedmiu ośrodków opieki zdrowotnej w Pampelunie (Navarra, Hiszpania).

Uwzględniając ryzyko pacjenci są podzieleni według trzech kategorii (zob. Rysunek 1):

- Pacjenci niskiego ryzyka (LR), których zakres ryzyka wynosi ≤ 5 . Pacjenci ci są oznaczeni kropkami;
- Pacjenci ze średnim ryzykiem (MR), których zakres ryzyka wynosi $(5, 10)$. Pacjenci ci są oznaczeni symbolem plusa;
- Pacjenci wysokiego ryzyka (HR), których zakres ryzyka wynosi ≥ 10 . Pacjenci ci są oznaczeni trójkątami.



Rysunek1: Wartość ryzyka zależna od wieku i skurczowego ciśnienia krwi



Rysunek2: Schemat wnioskowania

Schemat reprezentujący proces diagnostyczny składa się z elementów przedstawionych przez Rysunek 2. Omówię jego elementy.

2-Fazyfikacja

Aby skonstruować przedziałowy zbiór rozmyty reprezentujący dane medyczne/wejściowe każdego pacjenta i zawierający informację o wielkości nieprecyzyjności, zastosowano metodę złożoną z dwóch kroków:

1. Użycie trzech etykiet lingwistycznych dla zmiennej (niska, średnia i wysoka) wymaga modelowania ich za pomocą trzech funkcji przynależności. Wygenerowano zatem, dla każdej zmiennej wejściowej do systemu, zbiory rozmyte biorąc pod uwagę następujące funkcje przynależności:

- Funkcja typu L z parametrami (25,35) dla wieku i (120,130) dla skurczowego ciśnienia krwi (dla niskich wartości):

$$\mu_L(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ \frac{b-x}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

- Funkcja typu R z parametrami (45,65) dla wieku i (140,160) dla skurczowego ciśnienia krwi (dla wysokich wartości):

$$\mu_R(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

- Funkcja trapezoidalna z parametrami (25,35,45,65) dla wieku i (120,130,140,160) dla skurczowego ciśnienia krwi (dla średnich wartości):

$$\mu_T(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ or } x > d, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & b < x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c < x \leq d. \end{cases}$$

2. W kroku drugim dla każdego zbioru rozmytego $A \in FS(U)$ utworzono odpowiadający mu przedziałowy zbiór rozmyty w następujący sposób:

Bierzemy słabą funkcję ignorancji g (i.e., ciągła funkcja $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ taka, że $g(0) = g(1) = 0$, $g(0.5) = 1$ i $g(x) = g(1 - x)$ dla $x \in [0, 1]$).

Jeśli dla $u_i \in U$ wyznaczamy $g(\mu_A(u_i))$, $\delta(u_i)$, $\gamma(u_i) \in [0, 1]$, wtedy zbiór

$$A_{IV} = \{(u_i, A_{IV}(u_i)) | u_i \in U\},$$

gdzie

$$A_{IV}(u_i) = G(\mu_A(u_i), g(\mu_A(u_i)), \delta(u_i), \gamma(u_i))$$

jest przedziałowym zbiorem rozmytym na U . Mamy $\delta(u_i)$, $\gamma(u_i) \in [0, 1]$,

$$G(x, y, \delta, \gamma) = [x \cdot (1 - \delta \cdot y), x \cdot (1 - \delta \cdot y) + \gamma \cdot y].$$

Przyjęto: $\delta(u_i) = \gamma(u_i) = 0.25$ dla $u_i \in U$ i $g(x) = 2\min(x, 1 - x)$.

Baza reguł

Mając dwie zmienne wejściowe i rozważając trzy etykiety lingwistyczne dla każdej zmiennej (niska, średnia, wysoka) otrzymano 9 reguł:

Reguła1: Jeśli wiek jest niski i skurczowe ciśnienie krwi jest niskie, to ryzyko jest niskie

Reguła2: Jeśli wiek jest średni i skurczowe ciśnienie krwi jest niskie, to ryzyko jest niskie

.....

Reguła9: Jeśli wiek jest wysoki i skurczowe ciśnienie krwi jest wysokie, to ryzyko jest wysokie

Przyjmując oznaczenia LR (niskie ryzyko), MR (średnie ryzyko) i HR (wysokie ryzyko) wszystkie reguły możemy przedstawić następująco:

Age	Systolic blood pressure		
	Low	Medium	High
Low	LR	LR	LR
Medium	LR	MR	MR
High	LR	MR	HR

Generując relacje R powiązane z danymi regułami, reprezentowanymi przez macierze o 1796 wierszach i 898 kolumnach (9 przedziałowych macierzy rozmytych), użyto reprezentowalnej przedziałowej funkcji agregacji \mathcal{A} i standardowej negacji rozmytej N w przedziałowej negacji $N_{IV} = [N, N]$ następująco

$$R_{ij} = \mathcal{A}(N_{IV}([\underline{C}_i, \overline{C}_i]), [\underline{RL}(r_j), \overline{RL}(r_j)]),$$

gdzie C_i to dane przedziałowe pacjenta, a RL jest wartością ryzyka wskazanego przez eksperta dla tego pacjenta.

Wnioskowanie

Algorytm reprezentujący proces wnioskowania wykorzystuje algorytm GeneralApproximateReasoning i wyznaczono \mathcal{E}' dla $\mathcal{A} = \mathcal{A}_3 = \vee$. Algorytm składa się z następujących kroków:

- 1) Dla każdej reguły zbudowano skojarzoną przedziałową relację rozmytą $R_i \in IVFR(X \times Y)$, $i = 1, \dots, n$;
- 2) Wybrano przedziałową funkcję agregacji \mathcal{A}_1 ;
- 3) Dla każdej reguły wyliczono:

$$\mathcal{E}'_i(y) = \bigvee_{x \in X} \mathcal{A}_1(\mathcal{D}'(x), R_i(x, y)), \quad i = 1, \dots, n;$$

- 4) Wyznaczono: $\mathcal{E}' = \bigvee_{i=1}^n \mathcal{E}'_i$.

Ryzyko zachorowania nowego pacjenta

Zgodnie z proponowanym algorytmem, gdy przewidujemy ryzyko nowego pacjenta stosujemy następujące kroki:

- tworzymy zestaw przedziałowych wartości rozmytych jako dane wejściowe dla każdego atrybutu nowego pacjenta,
- następnie obliczane jest złożenie z każdą regułą (macierzą), co oznacza uzyskanie 9 przedziałowych zbiorów rozmytych,
- zbiory te są agregowane przy użyciu \bigvee , w wyniku czego wyjściem z systemu jest kolejny przedziałowy zbiór rozmyty.

2-Defazyfikacja

Na koniec dokonano wyostrenia rezultatu metodą centridów, a uzyskany wynik należy do jednej z klas decyzyjnych i wskazuje wartość ryzyka. Do wyniku dołączane są wytyczne dla pacjenta opracowane przez grupę lekarzy (w zależności od poziomu ryzyka).

Analiza wpływu różnych funkcji agregacji

W ramach prowadzonych badań opracowano optymalizację doboru funkcji agregacji oraz oceniono dla każdej błąd podejmowania decyzji. W końcowym rezultacie wybrano najskuteczniejszą operację dla rozważanego problemu. W celu oceny efektywności stosowanych agregacji wyszczególniono dwa scenariusze testowania funkcji agregacji:

- 1) gdy są używane tylko w procesie wnioskowania, tzn. do obliczenia operacji złożenia pomiędzy danymi wejściowymi, a macierzą reprezentującą relację powiązaną z daną regułą,
- 2) gdy są używane zarówno do generowania macierzy reprezentującej regułę, jak i w procesie wnioskowania.

Rozważono między innymi następujące reprezentowalne funkcje agregacji dla obu agregacji składowych: **OWA**, **norma trójkątna Łukasiewicza**, **funkcja sinus**

$$O^n(x_1, \dots, x_n) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right),$$

średnia harmoniczna, geometryczna oraz iloczyn.

Rezultat przedstawia Tablica 1, gdzie widzimy że błąd jest najmniejszy przy zastosowaniu normy trójkątnej Łukasiewicza w przypadkach niskiego lub średniego ryzyka, ale najistotniejszy jest rezultat dla wysokiego ryzyka. Wtedy operator IVOWA wyróżnił się największą efektywnością. Błąd diagnostyczny w przypadku wysokiego ryzyka może mieć poważne konsekwencje dla pacjenta, dlatego jego poprawne zdiagnozowanie jest priorytetowe.

Composition	Low	Medium	High	Total
Minimum	13.25	1.33	22.58	10.23
Product	13.11	1.33	22.61	10.13
Harmonic Mean	14.52	1.52	20.96	11.10
Geometric Mean	14.69	1.55	20.78	11.21
Sine	15.28	1.64	20.18	11.62
Łukasiewicz	12.92	1.32	22.76	10.01
OWA	15.28	1.64	20.18	11.62

Tablica1: Procent błędnych diagnoz uzyskany przy użyciu różnych operatorów agregacji w drugim scenariuszu testowania funkcji agregacji

Cardiovascular risk (10 years)

Age:

Systolic blood pressure:

Risk:

Rysunek3: Obraz platformy testowanej przez lekarzy

Prezentowana metoda jest alternatywną do metod opartych na zbiorach rozmytych i/lub klasyfikacyjnych, a zaproponowany system zapewnia dobre rezultaty w kontekście tych metod. Przytoczę tutaj analizę dwóch metod stosowanych do danych medycznych. Problem w prognozowaniu ryzyka sercowo-naczyniowego został także rozważony w pracy (Sanz i in. [54]), gdzie zastosowano metodę klasyfikacji opartą na rozmytych wartościach przedziałowych i algorytmie genetycznym, która okazała się efektywniejsza niż przy zastosowaniu klasyfikatora rozmytego. Jednakże używając operatora OWA w przedstawionej wcześniej metodzie, poprawiamy wyniki klasyfikacji o około 6 punktów procentowych (dla wysokiego ryzyka) w porównaniu do systemu przedstawionego w pracy [54].

Ponadto zastosowałam do naszego problemu decyzyjnego jedną z metod statystycznych, tj. model regresji porządkowej, wyniki nie były jednakże zadowalające. Stosowanie modelu regresji porządkowej, pomimo że jest statystycznie istotny w przypadku klasyfikacji, nie odróżnia wysokiego ryzyka od średniego (niski jest dobrze rozróżniany).

Obecnie system jest testowany w kilku ośrodkach medycznych (Rysunek 3).

Omawiana monografia nie uwzględnia wszystkich problemów związanych z teorią przedziałowych zbiorów rozmytych. Problematyka zagadnień z niepewnością dostarcza wiele nowych interpretacji, a możliwości związane z ich zastosowaniem będą stanowiły kontynuację moich badań (np. przetwarzanie obrazów z wykorzystaniem nowych miar podobieństwa).

5 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

W poniższych punktach omawiam pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze uzyskane po doktoracie, nie wchodzące w skład ww. osiągnięcia. Były to następujące tematy badawcze.

- 1) System rekomendacji wyborczej uwzględniający niepewność danych.
- 2) Wpływ wypukłości i wklęsłości na zachowywanie przechodniości relacji.
- 3) Miara podobieństwa w procesie podejmowania decyzji w środowisku intuicjonistycznym z wartościami przedziałowymi (similarity of interval-valued Atanassov's intuitionistic fuzzy sets).
- 4) OWA operator w wielokryterialnym procesie podejmowania decyzji zdefiniowany za pomocą porządku liniowego w środowisku intuicjonistycznym z wartościami przedziałowymi (interval-valued Atanassov's intuitionistic OWA operator).
- 5) Algorytmy wspierające leczenie przewlekłego bólu w procesie rehabilitacji.
- 6) Semi-własności i ich zależność z operacjami intuicjonistycznymi.

5.1 System rekomendacji wyborczej uwzględniający niepewność danych

Intuicjonistyczne rozmyte relacje Atanassova są narzędziem, które sprawia, że możliwe jest skuteczne modelowanie niepewnych informacji w sytuacjach, gdy przedziałowa reprezentacja nie jest odpowiednia. Omówiono problem przechodniości intuicjonistycznych relacji rozmytych Atanassova. Własność przechodniości odzwierciedla spójność relacji preferencji, dlatego przechodniość jest ważna w podejmowaniu decyzji grupowych, teorii wyboru i użyteczności wykorzystującej preferencję. Zaproponowano nowy algorytm generowania słabej przechodniości. Następnie korzystając z nowego algorytmu zaproponowano procedurę selekcji alternatyw w problemie podejmowania decyzji wyborczej.

Badania są rezultatem współpracy w ramach pobytu naukowego:

- Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, 22.02.2016 – 30.06.2016 (opiekun: Prof. Eulalia Szmidt).

Wyniki prowadzonych badań zostały opublikowane w pracy [49].

5.2 Wpływ wypukłości i wklęsłości na zachowywanie przechodniości relacji

Rozważono pewne uogólnienia wypukłości i wklęsłości oraz problem ich zachowywania w procesie agregacji. Ponadto zbadano zależność uogólnienia wypukłości i wklęsłości z przechodniością, w konsekwencji zaproponowano algorytm podejmowania decyzji z wykorzystaniem odpowiednich agregacji i różnych rodzajów metod porównywalności wartości przedziałowych.

Wyniki prowadzonych badań częściowo przedstawiono na konferencji naukowej:

- 13th International Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets (IWIFSGN'2014), Warszawa, Polska, 24-26.09.2014,

zostały także opublikowane w pracach [45, 47].

5.3 Miara podobieństwa w procesie podejmowania decyzji w środowisku intuicjonistycznym z wartościami przedziałowymi

Pod uwagę wzięto miarę stopnia zawierania i miarę podobieństwa dla dwóch intuicjonistycznych zbiorów rozmytych o wartościach przedziałowych (interval-valued Atanassov's intuitionistic fuzzy sets). Zaproponowano miarę zawierania i podobieństwa za pomocą porządku na zbiorze elementów intuicjonistycznych z wartościami przedziałowymi związanym z porządkiem leksykograficznym. Ponadto zbadano niektóre własności miary zawierania i podobieństwa oraz pewną korelację pomiędzy nimi i agregacjami. Na koniec przedstawiono przykład rozwiązania problemu decyzyjnego w salonach samochodowych.

Wyniki prowadzonych badań częściowo przedstawiono na konferencji naukowej:

- The 8th International Summer School on Aggregation Operators (AGOP'2015), Katowice, Polska, 7-10.07.2015

oraz zostały opublikowane w pracach [46] i [48].

5.4 OWA operator w wielokryterialnym procesie podejmowania decyzji zdefiniowany za pomocą porządku liniowego w środowisku intuicjonistycznym z wartościami przedziałowymi

Zbadano OWA operatory w oparciu o definicję porządku liniowego dla intuicjonistycznych zbiorów rozmytych Atanassova z wartościami przedziałowymi (interval-valued Atanassov's intuitionistic fuzzy sets). Rozważono także całki Choqueta do agregowania informacji, które są reprezentowane za pomocą intuicjonistycznego zbioru rozmytego Atanassova z wartościami przedziałowymi. Zaprezentowano dwa algorytmy służące do wyboru najlepszej alternatywy w problemie decyzyjnym, kiedy używamy intuicjonistycznych z wartościami przedziałowymi zbiorów rozmytych Atanassova do reprezentowania informacji.

Badania są rezultatem współpracy w ramach stażu naukowego:

- Public University of Navarra, Pamplona, Hiszpania, 24.08-24.09.2014 (opiekun: Prof. Humberto Bustince).

Wyniki prowadzonych badań zostały opublikowane w pracy [19].

5.5 Algorytmy wspierające leczenie przewlekłego bólu w procesie rehabilitacji

W ramach projektów została wprowadzona innowacja w terapii ultradźwiękowej, laseroterapii i narzędziem TENS w procesie leczenia przewlekłego bólu. Celem projektów było opracowanie algorytmów pozwalających, po uwzględnieniu indywidualnych cech chorobowych, stanu zdrowia (ciśnienie, implanty, przebyte choroby, np. rak), wieku, stanu i rodzaju skóry, optymalny dobór dawek w procesie leczenia przewlekłego bólu, a efektem było wskazanie bezpiecznej, a zarazem maksymalnej (zazwyczaj stosowana jest minimalna) dawki promieni i w konsekwencji skrócenie procesu leczenia w Gabinetcie Fizjoterapii oraz poprawę komfortu życia pacjenta. Ale głównym celem było opracowanie

algorytmów dawkowania natężenia promieni pacjentom paliatywnym, z którymi brak kontaktu werbalnego.

Badania odbywały się w ramach uczestnictwa w programach europejskich i współpracy z Gabinetem Fizjoterapii (w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki, Priorytet VIII Regionalne kadry gospodarki; Działanie 8.2 Transfer wiedzy; Poddziałanie 8.2.1 Wsparcie dla współpracy sfery nauki i przedsiębiorstw współfinansowanego przez Europejski Fundusz Społeczny):

- 1) Projekt „Nauka idzie w praktykę”, WND-POKL.08.02.01-18-015/2012, 2014 („Użycie narzędzi matematycznych w terapii ultradźwiękowej”);
- 2) Projekt „Transferencja”, WND-POKL.08.02.01-18-041/14, 2015 („Użycie narzędzi matematycznych w procesie leczenia przewlekłego bólu”);
- 3) Projekt „Staż sukcesem naukowca”, POKL.08.02.01-18-011/13, 2014 („Użycie narzędzi matematycznych w laseroterapii”).

Opracowane algorytmy zostały przekazane do Gabinetu Fizjoterapii i są w fazie testów.

5.6 Semi-własności i ich zależność z operacjami intuicjonistycznymi

Celem badań było zbadanie pewnych uogólnionych własności intuicjonistycznych rozmytych relacji Atanassova. Scharakteryzowano semi-zwrotność, semi-przeciwzwrotność, semi-symetria, semi-spójność, semi-asymetria, semi-przechodniość.

Szczególną uwagę zwrócono na własność semi-przechodniości. Przedstawiono jej charakterystykę i związki z innymi rodzajami przechodniości, tj. przechodniości i słabej przechodniości. Ponadto były badane pewne transformacje intuicjonistycznych relacji rozmytych Atanassova w kontekście zachowywania rozważanych własności. Rozważane procesy to: operacje kratowe, działanie odwrotnie, dopełnienie, czy złożenie relacji. Przeanalizowano także zależność semi-własności z własnością reciprociti dla relacji preferencji.

Wyniki prowadzonych badań przedstawiono na konferencjach:

- Ninth International Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets (IWIFSGN'2010), Warszawa, Polska, 08.10.2010,

- The Seventh conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT'2011), Aix-Les-Bains, Francja, 18-22.07.2011,

- 14th International Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets (IWIFSGN'2015), Kraków, Polska, 26-28.10.2015

oraz zostały opublikowane w pracach [25, 44] i [5].

Bibliografia

- [1] Barrenechea E., Fernandez J., Pagola M., Chiclana F., Bustince H.: Construction of interval-valued fuzzy preference relations from ignorance functions and fuzzy preference relations: Application to decision making. *Knowledge-Based Systems* **58**, 33–44 (2014)
- [2] Beliakov G., Bustince H., Calvo T.: A practical Guide to Averaging Functions. In: *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer Vol. **329** (2016)

- [3] Beliakov G., Bustince H., James S., Calvo T., Fernandez J.: Aggregation for Atanassov's intuitionistic and interval-valued fuzzy sets: The median operator. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **20**(3), 487–498 (2012)
- [4] Beliakov G., Pradera A., and Calvo T.: *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*. Springer, Berlin, Heidelberg (2007)
- [5] Bentkowska U., Pękala B., Bustince H., Fernandez J., Barrenechea E.: Semi-properties of Atanassov intuitionistic fuzzy relations. *Novel Developments in Uncertainty Representation and Processing*, 137–147. Springer (2016)
- [6] Bentkowska U., Bustince H., Jurio A., Pagola M., Pękala B.: Decision making with an interval-valued fuzzy preference relation and admissible orders. *Applied Soft Computing* **35**, 792–801 (2015)
- [7] Bentkowska U., Pękala B.: Generalized reciprocity property for interval-valued fuzzy setting in some aspect of social network. *IWIFSGN'2016 Fifteenth International Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets and Generalized Nets. Advances in Intelligent Systems and Computing Vol. 559*, 286–296 (2018)
- [8] Bentkowska U., Pękala B.: An equivalence relation and admissible linear orders in decision making. In: J. Kacprzyk et al. (eds.), *Advances in Fuzzy Logic and Technology 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing 641*. Springer (2018). DOI 10.1007/978-3-319-66830-718
- [9] Bentkowska U., Pękala B., Bustince H., Fernandez J., Jurio A., Balicki K.: N-reciprocity property for interval-valued fuzzy relations with an application to group decision making problems in social networks. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **25**, Suppl. 1, 43–72 (2017)
- [10] Bentkowska U.: New types of aggregation functions for interval-valued fuzzy setting and preservation of pos-B and nec-B-transitivity in decision making problems. *Information Sciences* **424**, 385–399 (2018)
- [11] Bentkowska U., Pękala B.: Diverse classes of interval-valued aggregation functions in medical diagnosis support. In: J. Medina et al. (eds.), *Communications in Computer and Information Science 855*, 1–13. Springer (2018). https://doi.org/10.1007/978-3-319-91479-4_33
- [12] Bustince H., Burillo P.: Mathematical analysis of interval-valued fuzzy relations: Application to approximate reasoning. *Fuzzy Sets and Systems* **113**, 205–219 (2000)
- [13] Bustince H., Pagola M., Mesiar R., Hüllermeier E., Herrera F.: Grouping, overlap and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparisons. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **20**(3), 405–415 (2012)
- [14] Bustince H., Fernandez J., Kolesárová A., Mesiar R.: Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions. *Fuzzy Sets and Systems* **220**, 69–77 (2013)
- [15] Bustince H., Galar M., Bedregal B., Kolesárová A., Mesiar R.: A new approach to interval-valued Choquet integrals and the problem of ordering in interval-valued fuzzy sets applications. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **21** (6), 1150–1162 (2013)
- [16] Castillo O., Melin P.: A review on interval type-2 fuzzy logic applications in intelligent control. *Information Sciences* **279**, 615–631 (2014)
- [17] Chiclana F., Herrera-Viedma E., Alonso S., Pereira R.A.M.: Preferences and consistency issues in group decision making. In: Bustince, H. et al. (eds.) *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models*, 219–237. Springer (2008)
- [18] De Baets B., Van de Walle B., Kerre E.: Fuzzy preference structures without incomparability. *Fuzzy Sets and Systems* **76**(3), 333–348 (1995)
- [19] De Miguel L., Bustince H., Pękala B., Bentkowska U., Da Silva I., Bedregal B., Mesiar R. and Ochoa G.: Interval-valued Atanassov intuitionistic OWA aggregations using admissible linear orders and their application to decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **24**(6), 1586–1597 (2016)

- [20] Deschrijver G.: Quasi-arithmetic means and OWA functions in interval-valued and Atanasov's intuitionistic fuzzy set theory. *EUSFLAT-LFA 2011, Aix-les-Bains, France*, 506–513 (2011)
- [21] Drewniak J., Pękala B.: Properties of fuzzy relations powers. *Kybernetika* **43**, 133–142 (2007)
- [22] Drygaś P., Pękala B.: Properties of decomposable operations on some extension of the fuzzy set theory. In: Atanasov, K.T., Hryniewicz, O., Kacprzyk, J. et al. (eds.) *Advances in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Related Topics, EXIT*, Warsaw, 105–118 (2008)
- [23] Dubois D., Liu W., Ma J., Prade H.: The basic principles of uncertain information fusion. An organised review of merging rules in different representation frameworks. *Information Fusion* **32**, 12–39 (2016)
- [24] Dudziak U., Pękala B.: Equivalent bipolar relations. *Fuzzy Sets and Systems* **161**(2), 234–253 (2010)
- [25] Dudziak U., Pękala B.: Intuitionistic fuzzy preference relations. In: Galichet, S. et al. (eds.), *Proceedings of the 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology*. Atlantis Press, 529–536 (2011)
- [26] Dyczkowski K.: *Intelligent Medical Decision Support System Based on Imperfect Information. The Case of Ovarian Tumor Diagnosis. Studies in Computational Intelligence* **735**. Springer (2018). DOI 10.1007/978-3-319-67005-8
- [27] Elkanó M., Sanz J.A., Galar M., Pękala B., Bentkowska U., Bustince H.: Composition of interval-valued fuzzy relations using aggregation functions. *Information Sciences* **369**, 690–703 (2016)
- [28] Fodor J., Roubens M.: *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1994)
- [29] Freson S., De Baets B., De Meyer H.: Closing reciprocal relations w.r.t. stochastic transitivity. *Fuzzy Sets and Systems* **241**, 2–26 (2014)
- [30] Gałgolewski M.: *Data Fusion. Theory, Methods, and Applications*, Institute of Computer Science. Polish Academy of Sciences, Warsaw (2015)
- [31] Goguen A.: L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **18**, 145–174 (1967)
- [32] Grabisch M., Marichal J.-L., Mesiar R., Pap E.: Aggregation functions: Means. *Information Sciences* **181**(1), 1–22 (2011)
- [33] Greco S., Pereira R.A.M., Squillante M., Yager R.R., Kacprzyk J.: *Preferences and Decisions Models and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2010)
- [34] Grzegorzewski P.: On possible and necessary inclusion of intuitionistic fuzzy sets. *Information Sciences* **181**(2), 342–350 (2011)
- [35] Hatch S.: *Snowball in a Blizzard: A Physician's Notes on Uncertainty in Medicine*. Basic Books, New York (2016)
- [36] Komorníková M., Mesiar R.: Aggregation functions on bounded partially ordered sets and their classification. *Fuzzy Sets and Systems* **175**, 48–56 (2011)
- [37] Liu F., Zhang W.-G., Zhang L.-H.: A group decision making model based on a generalized ordered weighted geometric average operator with interval preference matrices. *Fuzzy Sets and Systems* **246**, 1–18 (2014)
- [38] Mas M., Monserrat M., Ruiz-Aguilera D., Torrens J.: On generalization of the Modus Ponens: U-conditionality. In: J.P. Carvalho et al. (eds.), *IPMU 2016, Part I, CCIS* **610**, 387–398 (2016)
- [39] Mas M., Monserrat M., Ruiz-Aguilera D., Torrens J.: RU and (U, N)-implications satisfying Modus Ponens. *International Journal of Approximate Reasoning* **73**, 123–137 (2016)
- [40] Mendel J.M.: *Advances in Type-2 fuzzy sets and systems*. *Information Sciences* **177**, 84–110 (2007)

- [41] Ovchinnikov S.V., Roubens M.: On strict preference relations. *Fuzzy Sets and Systems* **43**, 319–326 (1991)
- [42] Paternain D., Jurio A., Barrenechea E., Bustince H., Bedregal B., Szmidt E.: An alternative to fuzzy methods in decision-making problems. *Expert Systems with Applications* **39** (9), 7729–7735 (2012)
- [43] Pękala B.: Preservation of properties of interval-valued fuzzy relations. In: Carvalho, J.P. et al. (eds.) *IFSA/EUSFLAT 2009*, 1206–1210 (2009)
- [44] Pękala B., Dudziak U.: Properties of intuitionistic fuzzy preference relations. In: K.T. Atanassov et al. (eds.), *Recent Advances in Fuzzy Sets, Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Related Topics I: Foundations*, SRI PAS/IBS PAN, 143–157 (2011)
- [45] Pękala B.: Aggregation process and some generalized convexity and concavity. In: P. Angelov et al. (eds.), *Mathematical Foundations, Theory, Analyses Series: Advances in Intelligent Systems and Computing* **322**, 33–43. Springer (2015)
- [46] Pękala B.: Similarity measure defined from overlap function. In: M. Baczyński et al. (eds.), *Proc. of the 8th International Summer School on Aggregation Operators*, July 7-10, 2015, University of Silesia, Katowice, Poland, 205–210 (2015). ISBN:978-83-8012-519-3.
- [47] Pękala B.: Group decision making problem by general convexity or concavity and aggregation process. *Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems* **10**(4), 62–69 (2016)
- [48] Pękala B., Balicki K.: Interval-valued intuitionistic fuzzy sets and similarity measure. *Iranian journal of fuzzy systems* **14**(4), 87–98 (2017)
- [49] Pękala B., Szmidt E., Kacprzyk J.: Group decision support under intuitionistic fuzzy relations: the role of weak transitivity and consistency. *Human centric data representation, manipulation and querying*, *International Journal of Intelligent Systems* (2018). DOI: 10.1002/int.21923
- [50] Pękala B.: Properties of interval-valued fuzzy relations, Atanassov’s operators and decomposable operations. *Communications in Computer and Information Science* **80**, 647–655, Springer, Berlin Heidelberg (2010)
- [51] Pękala B.: Properties of Atanassov’s intuitionistic fuzzy relations and Atanassov’s operators. *Information Sciences* **213**(5), 84–93 (2012)
- [52] Pękala B., Bentkowska U., De Baets B.: On comparability relations in the class of interval-valued fuzzy relations. *Tatra Mountains Mathematical Publications* **66**, 91–101 (2016)
- [53] Sambuc R.: *Fonctions ϕ -floues: Application à l’aide au diagnostic en pathologie thyroïdienne*. Ph.D. Thesis, Université de Marseille, France (1975) (in French)
- [54] Sanz J., Galar M., Jurio A., Brugos A., Pagola M., Bustince H.: Medical diagnosis of cardiovascular diseases using an interval-valued fuzzy rule-based classification system. *Applied Soft Computing Journal* **20**, 103–111 (2014)
- [55] Takáč Z.: Inclusion and subsethood measure for interval-valued fuzzy sets and for continuous type-2 fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* **224**, 106–120 (2013)
- [56] Xu Z.: On compatibility of interval fuzzy preference relations. *Fuzzy Optimization and Decision Making* **3**, 217–225 (2004)
- [57] Yager R.: On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **18**(1), 183–190 (1988)
- [58] Zadeh L.A.: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information Sciences* **8**, Part I, 199–251, Part II, 301–357, *Information Sciences* **9**, Part III, 43–80 (1975)
- [59] Zapata H., Bustince H., Montes S., Bedregal B., Dimuro G.P., Takáč Z., Baczyński M., Fernandez J.: Interval-valued implications and interval-valued strong equality index with admissible orders. *International Journal of Approximate Reasoning* **88**, 91–109 (2017)