

Magdalena Szymkowiak
Instytut Automatyki i Robotyki
Wydział Informatyki
Politechnika Poznańska
Pl. M. Skłodowskiej-Curie 5
60-965 Poznań

29 grudnia 2018
Załącznik 3

AUTOREFERAT

przedstawiający opis podstawowego osiągnięcia i pozostałego dorobku naukowego
w związku z ubieganiem się o nadanie stopnia doktora habilitowanego

1 Imię i nazwisko: Magdalena Szymkowiak

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- 29.06.2001 Doktorat, dyscyplina: matematyka
Wydział Matematyki i Informatyki, UAM, Poznań
Tytuł rozprawy: *Metody grafowe w zagadnieniach optymalizacji macierzy bramkowych*
promotor: prof. dr hab. Michał Karoński
- 25.06.1991 Magisterium, dyscyplina: matematyka
Wydział Matematyki i Informatyki, UAM, Poznań
Tytuł pracy: *Problem pakowania skrzyń*
promotor: prof. dr hab. Michał Karoński
dyplom z wyróżnieniem

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- 01.03.2015– Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Informatyki,
Politechnika Poznańska
umowa-zlecenie
- 01.10.2002– Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny
–28.02.2015 Politechnika Poznańska
adiunkt
- 01.09.1993– Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny
–30.09.2002 Politechnika Poznańska
asystent

4 Podstawowe osiągnięcia naukowe

Jako osiągnięcie naukowe, o którym mowa w art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz.U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311) niniejszym wskazuję

jednotematyczny cykl publikacji pod wspólnym tytułem
**ANALIZA CZASU ŻYCIA ZA POMOCĄ FUNKCJI
INTENSYWNOŚCI STARZENIA**

4.1 Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia

- [O1] SZYMKOWIAK, M. (2019). *Lifetime Analysis by Aging Intensity Functions*, Studies in Systems, Decision and Control, Springer, (DOI: 10.1007/978-3-030-12107-5).

Jestem jedynym autorem tej pracy.

- [O2] SZYMKOWIAK, M. (2018). Generalized aging intensity functions. *Reliability Engineering & System Safety*, 178, 198–208.

IF JCR 4.139, MNiSW 40 p.

Jestem jedynym autorem tej pracy.

- [O3] SZYMKOWIAK, M. (2018). Characterizations of distributions through aging intensity. *IEEE Transactions on Reliability*, 67(2), 446–458.

IF JCR 2.729, MNiSW 40 p.

Jestem jedynym autorem tej pracy.

- [O4] SZYMKOWIAK, M., Iwińska, M. (2018). Some results about bivariate discrete distributions through the vector of aging intensities. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, (Published online: 16 Apr 2018, DOI: 10.1080/03610926.2018.1459714).

IF JCR 0.353, MNiSW 15 p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 60%. Obejmował on wszystkie etapy przygotowania pracy, w szczególności: opracowanie jej koncepcji i układu; sformułowanie i udowodnienie wyników pracy; przygotowanie pracy do druku.

- [O5] Iwińska, M., SZYMKOWIAK, M. (2017). Characterizations of distributions through selected functions of reliability theory. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 46(1), 69–74.

IF JCR 0.353, MNiSW 15 p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 50%. Obejmował on wszystkie etapy przygotowania pracy, w szczególności: opracowanie jej koncepcji i układu; sformułowanie i udowodnienie wyników pracy; przygotowanie pracy do druku.

- [O6] SZYMKOWIAK, M., Iwińska, M. (2016). Characterizations of discrete Weibull related distributions. *Statistics and Probability Letters*, 111, 41–48.

IF JCR 0.540, MNiSW 15 p.

Wkład własny w powstanie tej publikacji szacuję na 70%. Obejmował on wszystkie etapy przygotowania pracy, w szczególności: opracowanie jej koncepcji i układu; sformułowanie i udowodnienie wyników pracy; podanie kontrprzykładów; przygotowanie pracy do druku.

4.2 Cel naukowy

Teoria niezawodności to dyscyplina nauki, która odpowiada na pytania dotyczące działania obiektu: czy obiekt działa poprawnie, czy spełnia wszystkie powierzone mu funkcje, czy działa w określonych warunkach, czy działa przez określony czas. Prowadzone przeze mnie badania dotyczą szczególnie tego ostatniego aspektu, czyli czasu życia obiektu, a ich wyniki mają zastosowanie głównie w różnych dziedzinach inżynierjno-technicznych, ale także w medycynie i biologii, w ekonomii, demografii oraz innych naukach społecznych.

W teorii niezawodności czas życia obiektu traktowany jest najczęściej jako nieujemna zmienna losowa absolutnie ciągła, a jej stosowanymi charakterystykami funkcyjnymi są przede wszystkim: dystrybuanta (zwana także funkcją zawodności), funkcja niezawodności (zwana funkcją przeżycia), funkcja gęstości, intensywność uszkodzeń (zwana funkcją hazardu lub funkcją ryzyka) oraz skumulowana intensywność uszkodzeń (zwana funkcją wiodącą). W roku 2003 w pracy [L8] została zdefiniowana nowa funkcja, nazwana intensywnością starzenia, zaproponowana jako dodatkowe narzędzie służące do analizy czasu życia. Wyraża ona stosunek chwilowej intensywności uszkodzeń do średniej intensywności uszkodzeń i pozwala opisać tendencję starzenia badanego obiektu.

Pierwszym celem moich badań było sprawdzenie, czy to nowe narzędzie może również służyć do charakteryzacji rozkładu i czy, wyestymowana na podstawie danych czasów życia, klasyczna intensywność starzenia umożliwia rozpoznanie ich rozkładu. Pierwsze takie próby zostały podjęte w pracy [L4]. Analizując zdefiniowany w [L17] porządek stochastyczny, związany z funkcją intensywności starzenia, doszłam do wniosku, że funkcja ta pozwala porównać proces starzenia badanego obiektu z procesem starzenia obiektu o wykładniczym czasie życia, czyli obiektu, którego intensywność uszkodzeń jest stała i nie zależy od czasu.

W związku z tym, korzystając z wyników [L2, L3], podjęłam próbę uogólnienia pojęcia intensywności starzenia. Umożliwiło to porównywanie procesu starzenia badanego obiektu z procesem starzenia obiektów o czasach życia określonych za pomocą innych używanych w teorii niezawodności rozkładów, takich jak rozkład potęgowy, Pareto, Lomaxa [L10, L13]. Co więcej, próbowałam zbadać, jak definicja i własności tej uogólnionej funkcji mogą zależeć od nośnika rozkładu życia, który w zastosowaniach praktycznych często okazuje się ograniczonym odcinkiem dodatniej półosi czasu.

Rozszerzając cel moich badań na przypadek dyskretny, zdefiniowałam pojęcie dyskretnych intensywności starzenia i próbowałam ustalić, czy również te funkcje mogą służyć do charakteryzacji odpowiednich rozkładów życia. Wówczas mogłyby być one użyte do rozpoznania rozkładu zmiennej losowej opisującej czas życia badanego obiektu wyrażony np. jako liczba poprawnie wykonanych operacji do momentu jego uszkodzenia.

Natomiast w przypadku dwuwymiarowym, zdefiniowałam wektory intensywności starzenia i badałam, czy umożliwiając one rozpoznanie rozkładu, opisującego na przykład czas życia obiektu złożonego z dwóch różnych składowych.

4.3 Osiągnięte wyniki

Pierwsze próby charakteryzacji rozkładu czasu życia za pomocą klasycznej intensywności starzenia zostały przeze mnie podjęte w pracy [O5]. W dalszych badaniach wprowadziłam pojęcie uogólnionej intensywności starzenia (zob. [O1] oraz [L23, L24]), dwie definicje intensywności starzenia dla zmiennych losowych dyskretnych (zob. [O6]), wektor intensywności starzenia dla zmiennych losowych dwuwymiarowych absolutnie ciągłych (zob. [O1] oraz [L25]), a także dwa wektory intensywności starzenia dla zmiennych losowych dwuwymiarowych dyskretnych (zob. [O4]). Szeroki opis tych funkcji oraz ich najważniejsze własności zostały zebrane w monografii [O1]. Wszystkie wprowadzone przeze mnie intensywności starzenia posłużyły m.in. do charakteryzacji odpowiednich zmiennych losowych. Oznacza to, że znając intensywność starzenia badanego obiektu mogliśmy rozpoznać rozkład zmiennej losowej opisującej czas jego życia.

W pracy [O2] zauważyłam, że intensywność starzenia może być traktowana jako, stosowana w ekonomii, elastyczność skumulowanej funkcji intensywności uszkodzeń. W takim razie, może ona służyć do pomiaru procentowego wzrostu wyczerpywania się zapasów niezawodności, gdy czas rośnie o niewielką wartość.

Ważne są również, opisane przeze mnie m. in. w [O1], związki zależnej od nośnika uogólnionej intensywności starzenia z porządkiem gwiazdzistym i innymi porządkami stochastycznymi. Oznacza to, że odpowiednie porównanie uogólnionych intensywności starzenia pozwala ustalić, który z badanych obiektów ma mniejszą zawodność, czyli który obiekt z większym prawdopodobieństwem będzie działał przez dłuższy czas.

Ponadto (zob. m.in. [O3]) stwierdziłam, że analizując dane reprezentujące

czasu życia badanych obiektów, można wyestymować funkcję intensywności starzenia i rozpoznać rozkład czasu ich życia, a nawet estymować niektóre parametry tego rozkładu.

Do głównych wyników uzyskanych w czasie prowadzonych badań, stanowiących przedmiot prezentowanego osiągnięcia, należą przede wszystkim:

1. charakteryzację rozkładów absolutnie ciągłych za pomocą klasycznej intensywności starzenia i analiza intensywności starzenia na podstawie danych, zob. p. 4.3.1, [O3] i [O5];
2. zdefiniowanie pojęcia G -uogólnionej intensywności starzenia i twierdzenie charakterystyczne wykorzystujące to pojęcie, zob. p. 4.3.2 i [O1];
3. związki zależnej od nośnika G -uogólnionej intensywności starzenia z porządkiem gwiazdzystym, zob. p. 4.3.3 i [O1];
4. definicja porządku uogólnionej intensywności starzenia i badanie jego związku z innymi porządkami stochastycznymi, zob. p. 4.3.4, [O1] i [O2];
5. charakteryzację rozkładów dyskretnych za pomocą zdefiniowanych dyskretnych intensywności starzenia, zob. p. 4.3.5 i [O6];
6. charakteryzację rozkładów dwuwymiarowych za pomocą wprowadzonych wektorów intensywności starzenia, zob. p. 4.3.6, [O1] i [O4].

4.3.1 Klasyczna intensywność starzenia

W teorii niezawodności czas życia obiektu opisywany jest najczęściej za pomocą zmiennej losowej absolutnie ciągłej X o nośniku $(0, +\infty)$. W badaniach wyznaczamy dystrybuantę tej zmiennej jako $F(x) = P(X \leq x)$, to znaczy prawdopodobieństwo zdarzenia, że awaria obiektu nastąpiła najpóźniej w chwili x , czyli inaczej zdarzenia, że po chwili x obiekt już nie działał. Funkcję niezawodności wyznaczamy jako $\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$, to znaczy prawdopodobieństwo zdarzenia, że obiekt działał bezawaryjnie do chwili x , a funkcję gęstości jako $f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = -\frac{d}{dx}\bar{F}(x)$, którą można interpretować jako spadek niezawodności obiektu w chwili x .

Ponadto przez $r(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{f(x)}{P(X>x)}$ oznaczamy intensywność uszkodzeń, czyli chwilowy spadek niezawodności obiektu, który następuje tuż po chwili x (przy założeniu, że do chwili x obiekt działał poprawnie). Przez

$R(x) = \int_0^x r(t)dt = -\ln(1 - F(x))$ oznaczamy skumulowaną intensywność uszkodzeń, którą interpretuje się jako wyczerpywanie się zapasu niezawodności, a przez $H(x) = \frac{1}{x} \int_0^x r(t)dt = \frac{1}{x}R(x)$ oznaczamy średnią intensywność uszkodzeń.

Wtedy przez

$$L(x) = \frac{r(x)}{H(x)} = \frac{r(x)}{\frac{1}{x} \int_0^x r(t)dt} = \frac{-x f(x)}{(1 - F(x)) \ln(1 - F(x))} \quad (1)$$

będziemy oznaczać intensywność starzenia (wprowadzoną w [L8]), czyli stosunek chwilowej intensywności uszkodzeń do średniej intensywności uszkodzeń badanego obiektu.

W ekonomii często stosowanym pojęciem jest elastyczność funkcji (zob. [L22])

$$E_\varphi(x) = \frac{\frac{d}{dx}\varphi(x)}{\frac{1}{x}\varphi(x)}, \quad (2)$$

która wyraża procentową zmianę pewnej wielkości zależnej opisanej funkcją $\varphi(x)$ (np. popytu) spowodowaną niewielką zmianą wielkości niezależnej x (np. ceny).

W naszym przypadku intensywność starzenia może być interpretowana jako procentowy wzrost skumulowanej intensywności uszkodzeń (wyczerpywania zapasów niezawodności), gdy czas rośnie o niewielką wartość (zobacz [O2]).

Charakteryzacje za pomocą klasycznej intensywności starzenia

W teorii niezawodności znany jest fakt [L1], że intensywność uszkodzeń zmiennej losowej, opisującej na przykład czas życia badanego obiektu, pozwala w jednoznaczny sposób wyznaczyć rozkład tej zmiennej

$$F_r(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x r(t)dt\right) \quad \text{dla } x \in (0, +\infty).$$

W pracy [O3] pokazano, że także intensywność starzenia zmiennej losowej może służyć do charakteryzacji tej zmiennej. Nie jest to jednak charakteryzacja jednoznaczna.

Twierdzenie 1 ([O3]). *Niech funkcja $L : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ spełnia następujące warunki*

$$\int_a^b \frac{L(t)}{t} dt < +\infty = \int_0^a \frac{L(t)}{t} dt = \int_a^{+\infty} \frac{L(t)}{t} dt$$

dla wszystkich $0 < a < b < +\infty$.

Wtedy L jest intensywnością starzenia rodziny absolutnie ciągłych zmiennych losowych o nośniku $(0, +\infty)$ i dystrybuantach postaci

$$F_{L,\kappa}(x) = 1 - \exp \left(-\kappa \exp \left(\int_a^x \frac{L(t)}{t} dt \right) \right), \quad x \in (0, +\infty),$$

dla każdego $0 < \kappa < +\infty$ i dowolnego $a \in (0, +\infty)$.

Można zauważyć, że scharakteryzowana w Twierdzeniu 1 rodzina rozkładów jest rodziną o proporcjonalnym hazardzie, ze skalującym parametrem wrażliwości $\kappa \in (0, +\infty)$,

$$F_\kappa(x) = 1 - (1 - F(x))^\kappa.$$

Oznacza to, że znając intensywność starzenia zmiennej losowej, opisującej na przykład czas życia badanego obiektu, możemy rozpoznać rodzinę rozkładów, do której rozkład tej zmiennej należy. Jest to rodzinna ze skalującym parametrem wrażliwości κ . Pozostałe parametry rozkładu są ustalone i da się je wyznaczyć na podstawie znanej funkcji intensywności starzenia.

Jednym z najczęściej stosowanych w teorii niezawodności rozkładów czasu życia jest dwuparametrowy rozkład Weibulla zdefiniowany po raz pierwszy w pracy [L26]. W swojej pracy Waloddi Weibull badał, czy zaproponowany przez niego rozkład charakteryzuje: odporność na zmęczenie stali St-37, plastyczność stali Bofors (szwedzka firma produkująca broń), wytrzymałość włókien bawełny indyjskiej, wielkość popiołu lotnego, długość Cyrtoideae (pewnego rodzaju muszli morskiej), wzrost dorosłych mężczyzn urodzonych na Wyspach Brytyjskich oraz szerokość fasoli Phaseolus Vulgaris.

Mówimy, że zmienna losowa X ma dwuparametrowy rozkład Weibulla, $X \sim W2(\gamma, \lambda)$, jeżeli dla $x \in (0, +\infty)$ oraz parametrów kształtu $\gamma > 0$ i skali $\lambda > 0$, dystrybuanta rozkładu dana jest wzorem $F(x) = 1 - \exp(-(\lambda x)^\gamma)$. Pozostałe charakterystyki funkcyjne dwuparametrowego rozkładu Weibulla przedstawiają się następująco:

- funkcja gęstości $f(x) = \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1} \exp(-(\lambda x)^\gamma)$,
- intensywność uszkodzeń $r(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \gamma \lambda^\gamma x^{\gamma-1}$,
- intensywność starzenia $L(x) = \frac{-x r(x)}{\ln(1-F(x))} = \gamma$.

Zgodnie z Twierdzeniem 1 oznacza to, że stała intensywność starzenia $L(x) = \gamma$ charakteryzuje rodzinę dwuparametrowych rozkładów Weibulla ze znanym parametrem kształtu γ i dowolnym parametrem skali.

Analiza klasycznej intensywności starzenia na podstawie danych

Poniższy przykład ilustruje, jak na podstawie danych dotyczących czasów działania badanych obiektów, estymując ich funkcję intensywności starzenia, możemy rozpoznać rozkład T czasu ich życia.

Przykład 1. Dane dotyczą czasu działania (w godzinach) 20 obiektów do momentu ich awarii (dane pochodzą z pracy [L15]): 11.24, 1.92, 12.74, 22.48, 9.60, 11.50, 8.86, 7.75, 5.73, 9.37, 30.42, 9.17, 10.20, 5.52, 5.85, 38.14, 2.99, 16.58, 18.92, 13.36.

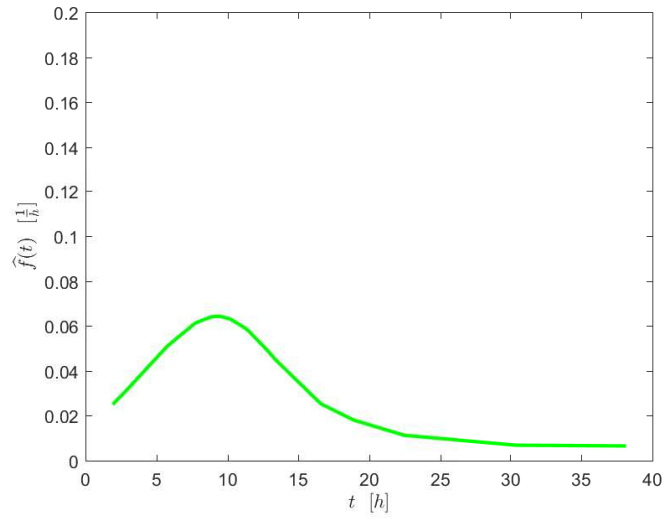
Na podstawie powyższych danych za pomocą dostępnej w programie *Matlab* funkcji `ksdensity` otrzymujemy estymator jądrowy funkcji gęstości (zobacz, m.in. [L5]) przedstawiony na Rysunku 1. Analiza kształtu wyestymowanej funkcji nie pozwala rozpoznać rozkładu T czasu życia badanych obiektów.

Natomiast stosując wzór

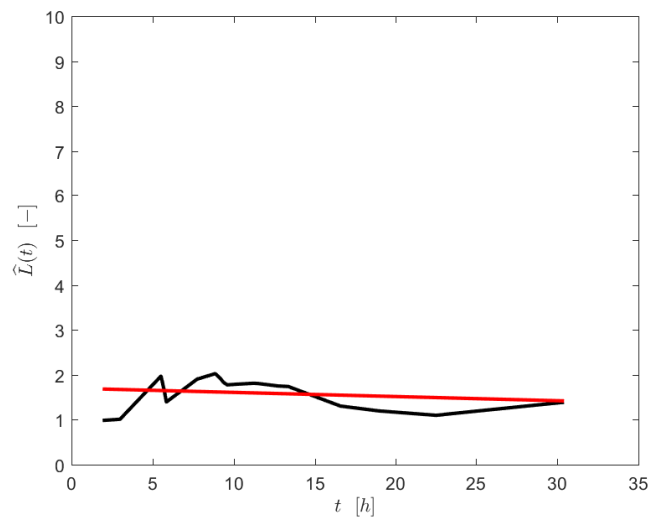
$$\hat{L}(t) = \frac{-t \hat{f}(t)}{(1 - \hat{F}(t)) \ln(1 - \hat{F}(t))}$$

(porównaj wzór (1)), otrzymujemy naturalny estymator intensywności starzenia przedstawiony na Rysunku 2. Analizując jego wykres, możemy przyjąć, że $L(t)$ oscyluje wokół stałej (na Rysunku 2 zaznaczona na czerwono, wyznaczona metodą najmniejszych kwadratów prosta regresji dla punktów $(t_i, \hat{L}(t_i))$), co oznacza, że zmienna T ma rozkład Weibulla.

Aby wyestymować parametry dwuparametrowego rozkładu Weibulla, można zastosować dostępną w programie *Matlab* funkcję `wblfit` opartą na metodzie największej wiarygodności. Tak wyestymowane parametry mają następujące wartości: $\hat{\gamma} = 1.5487$, $\hat{\lambda} = 0.0017$.



Rysunek 1: Estymator jądrowy $\hat{f}(t)$



Rysunek 2: Estymator $\hat{L}(t)$

Stosując dalej dostępną w programie *Matlab* funkcję `kstest`, czyli test zgodności Kołmogorowa, obliczamy statystykę $KSSTAT = 0.1494$ oraz p -value, $p = 0.7088$, która świadczy o tym, że na poziomie istotności $\alpha < 0.7088$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności badanego rozkładu z dwuparametrowym rozkładem Weibulla.

4.3.2 G -uogólniona intensywność starzenia

Zakładamy najpierw, że, tak jak dotychczas, F jest dystrybuantą czasu życia opisanego za pomocą absolutnie ciągłej zmiennej losowej X o nośniku $(0, +\infty)$ oraz G jest dowolną rosnącą absolutnie ciągłą dystrybuantą o nośniku $(0, +\infty)$. W pracach [L2, L3] zostały wprowadzone pojęcia G -uogólnionej skumulowanej intensywności uszkodzeń

$$R_{G,F}(x) = (G^{-1} \circ F)(x) \quad \text{dla } x \in (0, +\infty)$$

oraz G -uogólnionej intensywności uszkodzeń

$$r_{G,F}(x) = \frac{d}{dx} R_{G,F}(x) = \frac{f(x)}{(g \circ G^{-1} \circ F)(x)} \quad \text{dla } x \in (0, +\infty).$$

Analogicznie można zdefiniować G -uogólnioną intensywność starzenia [O2]

$$L_{G,F}(x) = \frac{r_{G,F}(x)}{\frac{1}{x} R_{G,F}(x)} = \frac{x}{(G^{-1} \circ F)(x)} \frac{f(x)}{(g \circ G^{-1} \circ F)(x)} \quad \text{dla } x \in (0, +\infty).$$

Zauważmy, że jeżeli G jest dystrybuantą standardowego rozkładu wykładniczego $Exp(1)$, czyli $G(x) = 1 - \exp(-x)$, dla $x \in (0, +\infty)$, funkcja kwantylowa (funkcja odwrotna do dystrybuanty) $G^{-1}(x) = -\ln(1 - x)$ oraz funkcja gęstości $g(x) = \frac{d}{dx} G(x) = \exp(-x)$, to wtedy G -uogólniona skumulowana intensywność uszkodzeń jest klasyczną skumulowaną intensywnością uszkodzeń

$$R_{G,F}(x) = (G^{-1} \circ F)(x) = -\ln(1 - F(x)) = R_F(x),$$

G -uogólniona intensywność uszkodzeń jest klasyczną intensywnością uszkodzeń

$$r_{G,F}(x) = \frac{f(x)}{(g \circ G^{-1} \circ F)(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = r_F(x),$$

a G -uogólniona intensywność starzenia jest klasyczną intensywnością starzenia

$$L_{G,F}(x) = \frac{-x f(x)}{(1 - F(x)) \ln(1 - F(x))} = L_F(x).$$

W praktyce często zdarza się, że czas życia obiektu opisany jest za pomocą absolutnie ciągłej zmiennej losowej o ograniczonym nośniku. Może to być związane z tym, że awarie obiektu nie występują poza czasem określonym przez ten nośnik i wiemy, na pewno, że w okresie poprzedzającym początek nośnika obiekt działa bezawaryjnie, natomiast w okresie następującym po końcu nośnika obiekt już na pewno nie działa, czyli jego awaria jest niemożliwa.

W związku z tym będziemy zakładać dalej, że F jest dystrybuantą absolutnie ciągłej zmiennej losowej X o ograniczonym nośniku $(l_F, u_F) \subset (0, +\infty)$. Również G może być rosnącą absolutnie ciągłą dystrybuantą o ograniczonym nośniku $(l_G, u_G) \subset (0, +\infty)$. Wtedy

$$L_{G,F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq l_F, \\ \frac{x}{(G^{-1} \circ F)(x)} \frac{f(x)}{(g \circ G^{-1} \circ F)(x)} & \text{dla } x \in (l_F, u_F), \\ +\infty & \text{dla } x \geq u_F, \end{cases} \quad (3)$$

jest G -uogólnioną intensywnością starzenia zdefiniowaną w [O1] oraz [L23]. Czyli przyjmujemy, że w czasie wcześniejszym niż początek nośnika, kiedy obiekt działa bezawaryjnie, G -uogólniona intensywność starzenia jest równa zeru, natomiast w czasie późniejszym niż koniec nośnika, kiedy obiekt na pewno nie działa, G -uogólniona intensywność starzenia jest równa $+\infty$. Przypadek klasyczny, gdy G jest dystrybuantą standardowego rozkładu wykładniczego

$$L_{G,F}(x) = L_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq l_F, \\ \frac{-x f(x)}{(1 - F(x)) \ln(1 - F(x))} & \text{dla } x \in (l_F, u_F), \\ +\infty & \text{dla } x \geq u_F, \end{cases}$$

został zdefiniowany w pracy [L4].

Charakteryzacje za pomocą G -uogólnionej intensywności starzenia

Podobnie jak klasyczna intensywność starzenia, także G -uogólniona intensywność starzenia charakteryzuje rozkład zmiennej losowej czasu życia. W zależności od tego, czy nośnik dystrybuanty G jest przedziałem $(0, +\infty)$,

czy jest ograniczony, charakteryzacja dotyczy całej rodziny rozkładów lub jest jednoznaczna. Rozważmy następujące cztery przypadki różnych typów charakteryzacji za pomocą uogólnionej intensywności starzenia.

Twierdzenie 2 ([O1]). *Niech G będzie dystrybucją o nośniku $(l_G, u_G) \subset (0, +\infty)$ i niech $L : (l, u) \rightarrow (0, +\infty)$.*

(i) *Jeżeli $l_G = 0$, $u_G = +\infty$ oraz*

$$\int_a^b \frac{L(t)}{t} dt < +\infty = \int_l^a \frac{L(t)}{t} dt = \int_a^u \frac{L(t)}{t} dt$$

dla każdego $l < a < b < u$, wtedy L jest G -uogólnioną intensywnością starzenia dla rodziny absolutnie ciągłych dystrybucji postaci

$$F_{G,L,\kappa}(x) = G \left(\kappa \exp \left(\int_a^x \frac{L(t)}{t} dt \right) \right) \quad \text{dla } x \in (l, u),$$

dla dowolnego ustalonego $l < a < u$ i każdego $\kappa > 0$.

(ii) *Jeżeli $l_G > 0$, $u_G = +\infty$ oraz*

$$\int_l^a \frac{L(t)}{t} dt < +\infty = \int_a^u \frac{L(t)}{t} dt$$

dla każdego $l < a < u$, wtedy L jest G -uogólnioną intensywnością starzenia dla jednoznacznie określonej absolutnie ciągłej dystrybucji danej wzorem

$$F_{G,L}(x) = G \left(l_G \exp \left(\int_l^x \frac{L(t)}{t} dt \right) \right) \quad \text{dla } x \in (l, u).$$

(iii) *Jeżeli $l_G = 0$, $u_G < +\infty$ oraz*

$$\int_a^u \frac{L(t)}{t} dt < +\infty = \int_l^a \frac{L(t)}{t} dt$$

dla każdego $l < a < u$, wtedy L jest G -uogólnioną intensywnością starzenia dla jednoznacznie określonej absolutnie ciągłej dystrybuanty równej

$$F_{G,L}(x) = G \left(u_G \exp \left(- \int_x^u \frac{L(t)}{t} dt \right) \right) \quad \text{dla } x \in (l, u).$$

(iv) Jeżeli $l_G > 0$, $u_G < +\infty$ oraz

$$\int_l^u \frac{L(t)}{t} dt = \ln(u_G) - \ln(l_G),$$

wtedy L jest G -uogólnioną intensywnością starzenia dla absolutnie ciągłej dystrybuanty jednoznacznie określonej jako

$$\begin{aligned} F_{G,L}(x) &= G \left(l_G \exp \left(\int_l^x \frac{L(t)}{t} dt \right) \right) \\ &= G \left(u_G \exp \left(- \int_x^u \frac{L(t)}{t} dt \right) \right) \quad \text{dla } x \in (l, u). \end{aligned}$$

Zauważmy, że rodzina dystrybant określona w Twierdzeniu 2(i) ze skalującym parametrem κ jest niezmiennicza ze względu na parametr skali dystrybuanty G .

Własności G -uogólnionej intensywności starzenia

Przedstawimy teraz dwie własności G -uogólnionej intensywności starzenia zmiennej losowej X o nośniku $(l_F, u_F) \subset (0, +\infty)$ przy założeniu, że G to dowolna rosnąca absolutnie ciągła dystrybuanta o nośniku $(l_G, u_G) \subset (0, +\infty)$.

Po pierwsze, G -uogólnioną intensywność starzenia możemy traktować jako elastyczność (2) G -uogólnionej skumulowanej intensywności uszkodzeń

$$L_{G,F}(x) = \frac{r_{G,F}(x)}{\frac{1}{x}R_{G,F}(x)} = \frac{\frac{d}{dx}R_{G,F}(x)}{\frac{1}{x}R_{G,F}(x)} = E_{R_{G,F}}(x).$$

Elastyczność może być interpretowana jako procentowy wzrost G -uogólnionej skumulowanej intensywności uszkodzeń, gdy czas rośnie o niewielką wartość (zob. [O1]).

Po drugie, jeżeli G -uogólniona intensywność starzenia jest liniowa,

$$L(x) = \gamma + \delta x \quad \text{dla } x \in (0, +\infty),$$

i G ma nośnik $(0, +\infty)$, to zgodnie z Twierdzeniem 2(i) charakteryzuje ona rodzinę rozkładów o dystrybuancie

$$F_{G,L,\kappa}(x) = G(\kappa x^\gamma \exp(\delta x)) \quad \text{dla } x \in (0, +\infty),$$

ze skalującym parametrem $0 < \kappa < +\infty$.

W szczególnym przypadku, jeżeli G jest dystrybuantą standardowego rozkładu wykładniczego, $Exp(1)$,

$$G(x) = 1 - \exp(-x) \quad \text{dla } x \in (0, +\infty),$$

to liniowa G -uogólniona intensywność starzenia, $L(x) = \gamma + \delta x$ dla $x > 0$, charakteryzuje rodzinę modyfikowanych rozkładów Weibulla, $MW(\gamma, \lambda, \delta)$ (zobacz [L11]), o dystrybuancie

$$F_{G,L,\kappa}(x) = 1 - \exp(-\kappa x^\gamma \exp(\delta x)),$$

ze skalującym parametrem $\lambda = \kappa^{\frac{1}{\gamma}}$.

Jeżeli natomiast G jest dystrybuantą standardowego rozkładu logarytmiczno-normalnego, $LN(0, 1)$,

$$G(x) = \Phi(\ln x) \quad \text{dla } x \in (0, +\infty),$$

to liniowa G -uogólniona intensywność starzenia, $L(x) = \gamma + \delta x$ dla $x > 0$, charakteryzuje rodzinę modyfikowanych standardowych rozkładów logarytmiczno-normalnych (zobacz [O1]), $MLN(0, 1, \gamma, \lambda, \delta)$, o dystrybuancie

$$F_{G,L,\kappa}(x) = \Phi(\ln(\kappa x^\gamma \exp(\delta x))), \quad (4)$$

ze skalującym parametrem $\lambda = \kappa^{\frac{1}{\gamma}}$, gdzie Φ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

Analiza G -uogólnionej intensywności starzenia na podstawie danych

W poniższym przykładzie pokazujemy, jak za pomocą G -uogólnionej intensywności starzenia można zweryfikować hipotezę, że losowo wygenerowane dane pochodzą z pewnej parametrycznej rodziny rozkładów. W niektórych sytuacjach (patrz Przykład 1) rozkład czasu życia może być trudny do rozpoznania na podstawie kształtu funkcji gęstości, natomiast dla odpowiednio dobranej dystrybucyjności G o gęstości g i funkcji kwantylowej G^{-1} , G -uogólniona intensywność starzenia (3) ma relatywnie prostą formę.

Naturalnym estymatorem G -uogólnionej intensywności starzenia jest

$$\widehat{L}_{G,\widehat{F}}(x) = \frac{x \widehat{f}(x)}{G^{-1}(\widehat{F}(x)) g(G^{-1}(\widehat{F}(x)))} \quad \text{dla } x \in (l_F, u_F), \quad (5)$$

gdzie $\widehat{f}(x)$ oznacza nieparametryczny estymator funkcji gęstości, natomiast $\widehat{F}(x) = \int_0^x \widehat{f}(t) dt$ jest odpowiednim estymatorem dystrybucyjności.

Przykład 2. Naszym zadaniem jest zweryfikować hipotezę, że modyfikowany rozkład logarytmiczno-normalny jest wyjściowym rozkładem losowo wygenerowanej próby X_1, \dots, X_N . Bez straty ogólności zakładamy, że rozkład ten jest charakteryzowany przez dystrybucyjność modyfikowanego standardowego rozkładu logarytmiczno-normalnego (4) dla nieznanymi parametrów γ, λ, δ ,

$$F_{\gamma,\lambda,\delta}(x) = \Phi(\ln((\lambda x)^\gamma \exp(\delta x))) = \Phi(\delta x + \gamma \ln x + \gamma \ln \lambda) \quad \text{dla } x \in (0, +\infty),$$

gdzie Φ oznacza dystrybucyjność standardowego rozkładu normalnego.

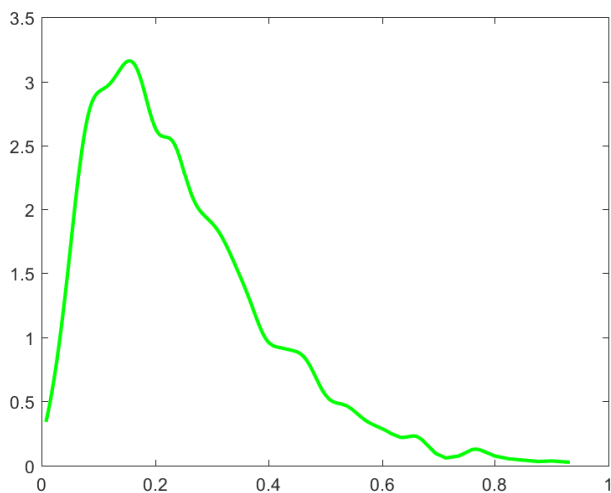
Z przedstawionych powyżej własności wynika, że dla $G(x) = \Phi(\ln x)$, będącej dystrybucyjnością standardowego rozkładu logarytmiczno-normalnego, $LN(0, 1)$, G -uogólniona intensywność starzenia modyfikowanego standardowego rozkładu logarytmiczno-normalnego $MLN(0, 1, \gamma, \lambda, \delta)$ jest liniowa

$$L_{G,F_{\gamma,\lambda,\delta}}(x) = \gamma + \delta x \quad \text{dla } x \in (0, +\infty).$$

Sprawdzamy, czy odpowiedni estymator (5), G -uogólnionej intensywności starzenia dla wygenerowanej próby losowej ma rzeczywiście kształt zbliżony do funkcji liniowej.

Przeprowadzamy następujące badanie symulacyjne. Generujemy $N = 1000$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $MLN(0, 1, \gamma, \lambda, \delta)$ dla

parametrów $\gamma = 1$, $\lambda = 3$, $\delta = 2$. Estymator jądrowy funkcji gęstości \hat{f} dla wygenerowanych danych jest przedstawiony na Rysunku 3. Niestety, kształt tego wykresu nie pozwala stwierdzić, czy jest to gęstość modyfikowanego rozkładu logarytmiczno-normalnego.

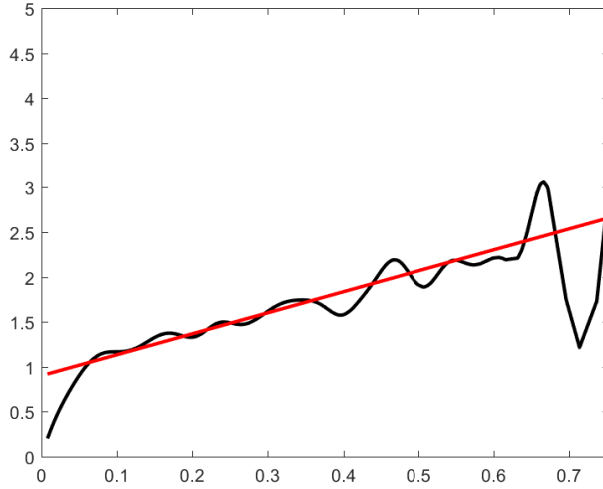


Rysunek 3: Estymator jądrowy $\hat{f}(x)$

Spróbujmy zatem dokonać analizy estymatora G -uogólnionej intensywności starzenia. Aby otrzymać estymator (5), korzystamy z estymatorów jądrowych funkcji gęstości \hat{f} i dystrybucyj \hat{F} , przy $g(x) = \frac{\Phi'(\ln x)}{x}$ i $G^{-1}(x) = \exp(\Phi^{-1}(x))$ będących, odpowiednio, funkcją gęstości i funkcją kwantylową standardowego rozkładu logarytmiczno-normalnego, $LN(0, 1)$.

Jak widać, wykres funkcji $\hat{L}_{G, \hat{F}}(x)$ (Rysunek 4) nie różni się znacząco od funkcji liniowej, szczególnie po usunięciu kilku odstających elementów na jego prawym końcu. To stanowi przesłankę, żeby zaakceptować postawioną wcześniej hipotezę, że modyfikowany rozkład logarytmiczno-normalny jest wyjściowym rozkładem losowo wygenerowanej próby.

Bardziej formalne uzasadnienie otrzymujemy, przeprowadzając następującą procedurę. Po pierwsze, za pomocą metody najmniejszych kwadratów wyznaczamy prostą regresji dla punktów $(X_i, \hat{L}_{G, \hat{F}}(X_i))$ (zaznaczona na czer-



Rysunek 4: Estymator $\hat{L}_{G,\hat{F}}(x)$

wono prosta na Rysunku 4). Jej współczynnik kierunkowy i wyraz wolny stanowią estymatory, odpowiednio, parametrów $\hat{\delta} = 2.3369$ i $\hat{\gamma} = 0.9002$.

Następnie, metodą największej wiarygodności otrzymujemy estymator

$$\hat{\lambda} = \exp \left(-\frac{1}{N\hat{\gamma}} \sum_{i=1}^N (\hat{\gamma} \ln X_i + \hat{\delta} X_i) \right)$$

parametru λ . W naszym przykładzie $\hat{\lambda} = 2.6570$. Teoretyczne parametry i ich estymatory, otrzymane za pomocą wyestymowanej G -uogólnionej intensywności starzenia, zostały zebrane w Tabelicy 1. Zauważmy, że estymatory te są dość dokładne.

Tabelica 1: Parametry $MLN(0, 1, \gamma, \lambda, \delta)$

	γ	λ	δ
Teoretyczne	1	3	2
Estymowane	0.9002	2.6570	2.3369

Ostatecznie, aby sprawdzić, czy wygenerowane dane rzeczywiście są zgodne z zadaniem rozkładem, stosujemy test zgodności χ^2 dla danych pogrupowanych w 20 klas (patrz Tablica 7.2 w pracy [O1]).

Dostępna w programie *MATLAB* funkcja `chi2gof` automatycznie łączy pięć małych liczb klas i wyznacza statystykę $\chi^2 = 7.3056$ z $\nu = 12$ stopniami swobody oraz p -value, $p = 0.8368$. Pozwala to stwierdzić, że na poziomie istotności $\alpha < 0.8368$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności badanego rozkładu z modyfikowanym rozkładem logarytmiczno-normalnym.

4.3.3 Zależna od nośnika G -uogólniona intensywność starzenia

Ograniczenie nośnika może być także związane z tym, iż awarie obiektu są obserwowane tylko przez pewien określony czas. Na przykład ograniczenie nośnika z dołu może być związane z tym, że albo nie ma możliwości obserwowania obiektu przez pewien początkowy okres jego działania, albo w związku z okresem gwarancji, w momencie awarii obiekt jest natychmiast wymieniany na nowy, czego użytkownik nie jest nawet świadomy i zaczynamy obserwację awarii dopiero po okresie gwarancji. Ograniczenie nośnika z góry może być natomiast związane z tym, iż obserwujemy czas życia obiektu tylko do pewnego momentu, gdyż wiadomo, że pewne obiekty raczej nie żyją dłużej niż określony czas (np. długość życia ludzkiego obserwujemy tylko przez 110 lat) lub że po pewnym określonym czasie działania, obiekt jest wymieniany na nowy i obserwujemy awarie tylko do momentu jego wymiany. W analogicznych przypadkach początek nośnika będziemy nazywać początkiem obserwacji, a koniec nośnika, końcem obserwacji obiektu.

W opisanych sytuacjach ważne jest, by przy wyznaczaniu G -uogólnionej intensywności starzenia uwzględnić nośnik $(l_F, u_F) \subset (0, +\infty)$ analizowanego rozkładu czasu życia X o dystrybuancie F oraz nośnik $(l_G, u_G) \subset (0, +\infty)$ rosnącej absolutnie ciągłej dystrybuanty G . Rozważmy najpierw przypadek gdy G jest dystrybuantą standardowego rozkładu wykładniczego $Exp(1)$. Wtedy zależna od nośnika klasyczna intensywność starzenia, zdefiniowana w [O3], ma postać

$$L_{G,F}^s(x) = L_F^s(x) = \frac{r_F(x)}{\frac{1}{x-l_F}R_F(x)} = \frac{(l_F - x) f(x)}{(1 - F(x)) \ln(1 - F(x))} \quad \text{dla } x \in (l_F, u_F).$$

Natomiast gdy G jest dowolną rosnącą absolutnie ciągłą dystrybuantą o nośniku $(l_G, u_G) \subset (0, +\infty)$, to zależna od nośnika G -uogólniona intensywność

starzenia, zdefiniowana w [O1] oraz [L24], dla $x \in (l_F, u_F)$, równa się

$$L_{G,F}^s(x) = \frac{r_{G,F}(x)}{\frac{1}{x-l_F}R_{G,F}^s(x)} = \frac{(x-l_F)}{((G^{-1} \circ F)(x) - l_G)} \frac{f(x)}{(g \circ G^{-1} \circ F)(x)}. \quad (6)$$

Charakteryzacje za pomocą zależnej od nośnika G -uogólnionej intensywności starzenia

Również zależna od nośnika G -uogólniona intensywność starzenia charakteryzuje rozkład zmiennej losowej czasu życia. W zależności od tego, czy koniec u_G nośnika dystrybuanty G jest skończony, czy nie, charakteryzacja jest jednoznaczna lub dotyczy całej rodziny rozkładów. Rozważmy następujące dwa przypadki charakteryzacji za pomocą zależnej od nośnika G -uogólnionej intensywności starzenia.

Twierdzenie 3 ([O1]). *Niech G będzie dystrybuantą o nośniku $(l_G, u_G) \subset (0, +\infty)$ i niech $L^s : (l, u) \rightarrow (0, +\infty)$.*

(i) *Jeżeli $0 \leq l_G < u_G = +\infty$ oraz*

$$\int_a^b \frac{L^s(t)}{t-l} dt < +\infty = \int_l^a \frac{L^s(t)}{t-l} dt = \int_a^u \frac{L^s(t)}{t-l} dt$$

dla każdego $l < a < b < u$, wtedy L^s jest zależną od nośnika G -uogólnioną intensywnością starzenia dla rodziny absolutnie ciągłych dystrybuant postaci

$$F_{G,L^s,\kappa}(x) = G \left(l_G + \kappa \exp \left(\int_a^x \frac{L^s(t)}{t-l} dt \right) \right) \quad \text{dla } x \in (l, u),$$

dla dowolnego ustalonego $l < a < u$ i każdego $\kappa > 0$.

(ii) *Jeżeli $0 \leq l_G < u_G < +\infty$ oraz*

$$\int_a^u \frac{L^s(t)}{t-l} dt < +\infty = \int_l^a \frac{L^s(t)}{t-l} dt$$

dla każdego $l < a < u$, wtedy L^s jest zależną od nośnika G -uogólnioną intensywnością starzenia dla jednoznacznie określonej absolutnie ciągłej dystrybuanty danej wzorem

$$F_{G,L^s}(x) = G \left(l_G + (u_G - l_G) \exp \left(- \int_x^u \frac{L^s(t)}{t - l} dt \right) \right) \quad \text{dla } x \in (l, u).$$

Zauważmy, że rodzina dystrybuant określona w Twierdzeniu 3(i) ze skalującym parametrem κ jest niezmiennicza ze względu na parametr skali i położenia dystrybuanty G .

Związki zależnej od nośnika G -uogólnionej intensywności starzenia z porządkiem gwiazdzistym

Dla G będącej dowolną rosnącą absolutnie ciągłą dystrybuantą o nośniku (l_G, u_G) , zależna od nośnika G -uogólniona intensywność starzenia badanego obiektu (o czasie życia opisanym za pomocą zmiennej losowej absolutnie ciągłej X o dystrybuancie F i nośniku (l_F, u_F)) ma związek z wprowadzonym w [L6] zależnym od nośnika porządkiem gwiazdzistym.

Dla dystrybuant F, G o nośnikach $(l_F, u_F), (l_G, u_G) \subset (0, +\infty)$, mówimy, że F poprzedza (jest nie większa od) G w zależnym od nośnika porządku gwiazdzistym, co zapisujemy $F \preceq_* G$, wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\frac{(G^{-1} \circ F)(x) - l_G}{x - l_F}$ jest niemalejąca na przedziale (l_F, u_F) .

Powyższa własność jest równoważna temu, że funkcja $\frac{G^{-1}(u) - l_G}{F^{-1}(u) - l_F}$ jest niemalejąca na przedziale $(0, 1)$, co jest równoważne temu, że, przesunięta do początku układu współrzędnych, funkcja kwantylowa $G^{-1}(u) - l_G$ rośnie na przedziale $(0, 1)$ co najmniej tak szybko jak, przesunięta do początku układu współrzędnych, funkcja kwantylowa $F^{-1}(u) - l_F$. To jest z kolei równoważne temu, że dystrybuanta $F(x + l_F)$, obliczona dla argumentu przesuniętego do początku dodatniej półosi, może przeciąć dystrybuantę $G(x + l_G)$, obliczoną dla argumentu przesuniętego do początku dodatniej półosi, tylko raz, z dołu do góry. W konsekwencji oznacza to, że zawodność pierwszego obiektu (którego czas życia opisany jest za pomocą dystrybuanty F) wyznaczona od początku obserwacji tego obiektu, może być od pewnego momentu większa niż zawodność drugiego obiektu (którego czas życia opisany jest za pomocą dystrybuanty G) wyznaczona od początku obserwacji drugiego obiektu.

W następujących trzech faktach przedstawiony zostanie związek zależnej od nośnika G -uogólnionej intensywności starzenia z porządkiem gwiazdzistym.

Fakt 1 ([O1]). $L_{G,F}^s(x) \geq \alpha$ ($L_{G,F}^s(x) \leq \alpha$), $x \in (l_F, u_F) \iff$ funkcja $\frac{G^{-1}(u)-l_G}{(F^{-1}(u)-l_F)^\alpha}$ jest niemalejąca (nierosnąca) dla $u \in (0, 1)$.

Wynika stąd, że zależna od nośnika G -uogólniona intensywność starzenia zmiennej losowej o dystrybuancie F jest większa bądź równa α (odpowiednio mniejsza bądź równa α) wtedy i tylko wtedy, gdy, przesunięta do początku układu współrzędnych, funkcja kwantylowa $G^{-1}(u) - l_G$ rośnie na przedziale $(0, 1)$ co najmniej (odpowiednio co najwyżej) tak szybko jak α potęgą, przesuniętej do początku układu współrzędnych, funkcji kwantylowej $F^{-1}(u) - l_F$.

Fakt 2 ([O1]). $L_{G,F}^s(x) \geq 1$ ($L_{G,F}^s(x) \leq 1$), $x \in (l_F, u_F) \iff F \preceq_* G$ ($F \succeq_* G$).

Gdy $\alpha = 1$, oznacza to, że dystrybuanta F jest nie większa (odpowiednio nie mniejsza) niż dystrybuanta G w porządku gwiazdzistym, czyli że zawodność obiektu, którego czas życia opisany jest za pomocą dystrybuanty F , wyznaczonej od początku obserwacji tego obiektu, może być od pewnego momentu większa (odpowiednio mniejsza) niż zawodność drugiego obiektu, którego czas życia opisany jest za pomocą dystrybuanty G , wyznaczonej od początku obserwacji drugiego obiektu.

Fakt 3 ([O1]). $L_F^s(x) \geq 1$ ($L_F^s(x) \leq 1$), $x \in (l_F, u_F) \iff F \preceq_* G$ ($F \succeq_* G$), gdzie G jest dystrybunatą rozkładu $Exp(1)$.

W przypadku zależnej od nośnika klasycznej intensywności starzenia oznacza to, że jest ona większa bądź równa 1 (odpowiednio mniejsza bądź równa 1) wtedy i tylko wtedy, gdy F jest nie większa (odpowiednio nie mniejsza) w porządku gwiazdzistym niż dystrybuanta rozkładu $Exp(1)$. Czyli że zawodność obiektu, którego czas życia opisany jest za pomocą dystrybuanty F , wyznaczona od początku obserwacji tego obiektu, jest od pewnego momentu większa (odpowiednio mniejsza) niż zawodność drugiego obiektu, którego czas życia opisany jest za pomocą dystrybuanty standardowego rozkładu wykładniczego.

Liniowa zależna od nośnika G -uogólniona intensywność starzenia

Jeżeli zależna od nośnika G -uogólniona intensywność starzenia jest liniowa,

$$L^s(x) = A + Bx \quad \text{dla } x \in (l, +\infty),$$

i G ma nośnik $(l_G, +\infty)$, to zgodnie z Twierdzeniem 3(i) charakteryzuje ona rodzinę rozkładów o dystrybuancie

$$F_{G,L,\kappa}(x) = G(l_G + \kappa(x-l)^{A+B} \exp(B(x-l))) \quad \text{dla } x \in (l, +\infty),$$

ze skalującym parametrem $0 < \kappa < +\infty$.

W szczególnym przypadku, jeżeli G jest dystrybuantą trzyparametrowego (przesuniętego) rozkładu Weibulla, $W3(\gamma_G, \lambda_G, l_G)$,

$$G(x) = 1 - \exp(-\lambda_G(x-l_G)^{\gamma_G}),$$

to liniowa zależna od nośnika G -uogólniona intensywność starzenia, $L^s(x) = A + Bx$ dla $x > l$, charakteryzuje rodzinę przesuniętych modyfikowanych rozkładów Weibulla (zobacz [O1]), $SMW(\gamma_F, \lambda_F, \delta_F, l_F)$, o dystrybuancie

$$F_{G,L^s,\kappa}(x) = 1 - \exp(-(\lambda_F(x-l_F))^{\gamma_F} \exp(\delta_F(x-l_F))) \quad \text{dla } x \in (l_F, +\infty),$$

z parametrami $\gamma_F = \gamma_G(A+B)$, $\delta_F = \gamma_G B$, $l_F = l$ i ze skalującym parametrem $\lambda_F = \kappa \frac{1}{\gamma_G^{A+B}}$.

Jeżeli natomiast G jest dystrybuantą rozkładu Pareto I (zob. [L10]), $PI(\lambda_G, \xi_G)$,

$$G(x) = 1 - (\lambda_G x)^{-\xi_G} \quad \text{dla } x \in \left(\frac{1}{\lambda_G}, +\infty\right),$$

to liniowa G -uogólniona intensywność starzenia, $L^s(x) = A + Bx$ dla $x > l$, charakteryzuje rodzinę modyfikowanych rozkładów Pareto IV (zobacz [O1]), $MPIV(\gamma_F, \lambda_F, \xi_F, \delta_F, l_F)$, o dystrybuancie

$$F_{G,L,\kappa}(x) = 1 - \left[1 + (\lambda_F(x-l_F))^{\frac{1}{\gamma_F}} \exp(\delta_F(x-l_F))\right]^{-\xi_F} \quad \text{dla } x \in (l_F, +\infty),$$

z parametrami $\gamma_F = \frac{1}{A+B}$, $\xi_F = \xi_G$, $\delta_F = B$, $l_F = l$ i ze skalującym parametrem $\lambda_F = \kappa \frac{1}{A+B}$.

4.3.4 Porządek intensywności starzenia

Na podstawie funkcji intensywności starzenia można zdefiniować porządek intensywności starzenia zwany w literaturze *AI* porządkiem (zobacz [L17]). Porządek ten pozwala określić, który z dwóch obserwowanych obiektów ma mniejszą tendencję starzenia. Zauważmy, że wszystkie porządki stochastyczne można definiować zarówno dla dystrybuant jak i dla zmiennych losowych.

Klasyczny porządek *AI*

Niech X i Y będą absolutnie ciągłymi zmiennymi losowymi o dystrybuantach F_X i F_Y oraz wspólnym nośniku $(0, +\infty)$, opisującymi czas życia dwóch różnych obiektów. Mówimy, że X jest nie mniejsza od Y w porządku intensywności starzenia *AI*, gdy dla wszystkich $x \in (0, +\infty)$, intensywność starzenia L_{F_X} jest nie większa niż intensywność starzenia L_{F_Y} , co zapisujemy w następujący sposób:

$$X \succeq_{AI} Y \iff L_{F_X}(x) \leq L_{F_Y}(x).$$

Oznacza to, że jeżeli zmienna losowa X ma mniejszą (nie większą) funkcję intensywności starzenia niż zmienna losowa Y , to X jest większa (nie mniejsza), czyli lepsza (nie gorsza), w porządku *AI*, $X \succeq_{AI} Y$. Zatem obiekt, którego czas życia opisany jest za pomocą zmiennej losowej X ma mniejszą tendencję starzenia niż obiekt, którego czas życia opisany jest za pomocą zmiennej losowej Y .

Porządek *sGAI*

W pracy [O1] oraz [L24] został zdefiniowany porządek zależnej od nośnika G -uogólnionej intensywności starzenia *sGAI*. Zakładamy, że X i Y to absolutnie ciągłe zmienne losowe o dystrybuantach F_X, F_Y i nośnikach $(l_{F_X}, u_{F_X}), (l_{F_Y}, u_{F_Y}) \subset (0, +\infty)$, a G to dowolna rosnąca absolutnie ciągła dystrybuanta o nośniku $(l_G, u_G) \subset (0, +\infty)$. Wtedy mówimy, że X jest nie mniejsza od Y w porządku zależnej od nośnika G -uogólnionej intensywności starzenia *sGAI*, gdy $l_{F_Y} \leq l_{F_X}, u_{F_Y} \leq u_{F_X}$ i dla wszystkich $x \in (l_{F_X}, u_{F_Y})$, zależna od nośnika G -uogólniona intensywność starzenia L_{G, F_X}^s jest nie większa niż zależna od nośnika G -uogólniona intensywność starzenia L_{G, F_Y}^s , co zapisujemy następująco:

$$X \succeq_{sGAI} Y \iff L_{G, F_X}^s(x) \leq L_{G, F_Y}^s(x).$$

Można pokazać, że dla pewnych klas rozkładów, jeżeli odpowiednie parametry rozkładów są uporządkowane, to między rozkładami zachodzi porządek zależnej od nośnika G -uogólnionej intensywności starzenia $sGAI$ (zob. [O1]).

Porządek αAI

Szczególnym przypadkiem porządku $sGAI$ jest porządek zdefiniowany w [O2] dla G będącej dystrybuantą uogólnionego rozkładu Pareto ([L19])

$$G(x) = W_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} & \text{dla } \begin{cases} x > 0, & \alpha < 0, \\ 0 < x < \frac{1}{\alpha}, & \alpha > 0, \end{cases} \\ 1 - \exp(-x) & \text{dla } x > 0, \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla ujemnych α jest to dystrybuanta rozkładu Pareto II (zwanego rozkładem Lomaxa, zobacz m.in. [L13]), dla dodatnich α – dystrybuanta rozkładu potęgowego ([L19]), a dla $\alpha = 0$ – dystrybuanta standardowego rozkładu wykładniczego.

Zauważmy ponadto, że jeżeli X jest absolutnie ciągłą zmienną losową o dystrybuancie F i nośniku $(0, +\infty)$, a G jest dystrybuantą uogólnionego rozkładu Pareto, to zależna od nośnika G -uogólniona intensywność starzenia (3) i G -uogólniona intensywność starzenia (6) są sobie równoważne $L_{W_\alpha, F}^s = L_{W_\alpha, F}$. Będziemy je dalej oznaczać przez $L_{\alpha, F}$.

Zakładamy teraz, że X i Y są absolutnie ciągłymi zmiennymi losowymi o dystrybuantach F_X , F_Y i wspólnym nośniku $(0, +\infty)$, natomiast G jest uogólnionym rozkładem Pareto. Wtedy mówimy, że X jest nie mniejsza od Y w porządku α -uogólnionej intensywności starzenia, $X \succeq_{\alpha AI} Y$ (zobacz [O2]), gdy dla wszystkich $x \in (0, +\infty)$, α -uogólniona intensywność starzenia L_{α, F_X} jest nie większa niż α -uogólniona intensywność starzenia L_{α, F_Y} , co zapisujemy w następujący sposób:

$$X \succeq_{\alpha AI} Y \iff L_{\alpha, F_X}(x) \leq L_{\alpha, F_Y}(x).$$

Rozważmy następujące szczególne przypadki αAI porządku.

Dla $\alpha = 0$, porządek $0AI$ to klasyczny porządek AI .

Dla $\alpha = 1$, porządek $1AI$ jest równoważny porządkowi odwróconego hazardu

$$X \preceq_{1AI} Y \iff X \succeq_{rh} Y,$$

gdzie porządek odwróconego hazardu jest zdefiniowany w następujący sposób. Dla każdego $x \in (0, +\infty)$ zachodzi

$$X \succeq_{rh} Y \iff \check{r}_{F_X}(x) \geq \check{r}_{F_Y}(x),$$

a funkcja \check{r} zwana odwróconą intensywnością uszkodzeń (odwróconym hazardem) jest zdefiniowana jako

$$\check{r}_{F_X}(x) = \frac{f_X(x)}{F_X(x)} = \frac{f_X(x)}{P(X \leq x)}$$

i jest interpretowana jako chwilowy spadek niezawodności obiektu, który następuje tuż przed chwilą x (zakładamy, że po chwili x obiekt już nie działał).

Dla $\alpha = n \in \mathbb{N}$, porządek nAI jest równoważny porządkowi odwróconego hazardu dla pierwszych statystyk porządkowych

$$X \preceq_{nAI} Y \iff X_{1:n} \succeq_{rh} Y_{1:n}.$$

Dla $\alpha = -1$, porządek $-1AI$ jest równoważny porządkowi LOR

$$X \preceq_{-1AI} Y \iff X \leq_{LOR} Y,$$

gdzie porządek LOR (wprowadzony w pracy [L18]) jest zdefiniowany w następujący sposób. Dla każdego $x \in (0, +\infty)$ zachodzi

$$X \succeq_{LOR} Y \iff LOR_{F_X}(x) \leq LOR_{F_Y}(x), \quad (7)$$

a funkcja LOR (log-odds rate) jest zdefiniowana jako

$$LOR_{F_X}(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}_X(x)F_X(x)} = r_{F_X}(x) + \check{r}_{F_X}(x)$$

i może być interpretowana jako chwilowy spadek niezawodności obiektu, który następuje w chwili x (zakładamy, że obiekt działał poprawnie do chwili x , a po chwili x obiekt już nie działał).

Następujący fakt ilustruje zależności między porządkiem αAI a porządkiem LOR (7) i dwoma znanymi w teorii niezawodności porządkami: porządkiem hazardowym postaci

$$X \succeq_{hr} Y \iff r_{F_X}(x) \leq r_{F_Y}(x),$$

i klasycznym porządkiem stochastycznym, zdefiniowanym jako

$$X \succeq_{st} Y \iff F_X(x) \leq F_Y(x) \iff \bar{F}_X(x) \geq \bar{F}_Y(x).$$

Fakt 4 ([O2]). *Dla absolutnie ciągłych zmiennych losowych X, Y z dystrybuantami F_X, F_Y , gęstościami f_X, f_Y i wspólnym nośnikiem $(0, +\infty)$*

- (i) *jeżeli istnieje $\beta \in \mathbb{R}$, takie że dla wszystkich $\alpha < \beta$ zachodzi $X \succeq_{\alpha AI} Y$, to $X \succeq_{hr} Y$,*
- (ii) *jeżeli istnieje $\beta \in \mathbb{R}$, takie że dla wszystkich $\alpha > \beta$ zachodzi $X \preceq_{\alpha AI} Y$, to $X \succeq_{st} Y$,*
- (iii) *jeżeli $X \succeq_{st} Y$ i $X \preceq_{LOR} Y$, to $X \preceq_{\alpha AI} Y$ dla $\alpha > -1$,*
- (iv) *jeżeli $X \succeq_{st} Y$ i $X \succeq_{LOR} Y$, to $X \succeq_{\alpha AI} Y$ dla $\alpha < -1$.*

4.3.5 Dyskretne intensywności starzenia

Zauważmy, że często nieujemna dyskretna zmienna losowa o wartościach całkowitych lepiej opisuje życie obiektu niż zmienna losowa ciągła. Dotyczy to na przykład: liczby operacji zakończonych sukcesem przed uszkodzeniem obiektu (liczby wykonanych fotokopii przed uszkodzeniem drukarki), liczby włączeń i wyłączeń jakiegoś elektrycznego urządzenia do momentu jego uszkodzenia, liczby dni hospitalizacji lub liczonej w latach długości życia ludzkiego.

Założmy więc, że K jest dyskretną zmienną losową o nośniku $\{1, 2, \dots\}$. Przez $F(k) = P(K \leq k)$ oznaczmy jej dystrybuantę, przez $\bar{F}(k) = 1 - F(k) = P(K > k)$ funkcję niezawodności, a przez $P(K = k) = \bar{F}(k-1) - \bar{F}(k) = F(k) - F(k-1)$ funkcję rozkładu prawdopodobieństwa tej zmiennej K .

W [L20] zdefiniowano intensywność uszkodzeń dla rozkładów dyskretnych jako $r(k) = -\ln \frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-1)}$ dla $k = 1, 2, \dots$ (analogia do przypadku ciągłego, gdzie $r(x) = \frac{f(x)}{F(x)} = -\frac{d \ln \bar{F}(x)}{dx}$).

W takim razie, dla $k = 1, 2, \dots$, średnia intensywność uszkodzeń może być zdefiniowana jako $H(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r(i) = -\frac{1}{k} \ln \bar{F}(k)$, a dyskretna intensywność starzenia jako

$$L(k) = \frac{r(k)}{H(k)} = k \left[1 - \frac{\ln \bar{F}(k-1)}{\ln \bar{F}(k)} \right].$$

Natomiast, jeżeli definiujemy dyskretną intensywność starzenia przez analogię do ciągłej intensywności starzenia określonej jako $L(x) = \frac{r(x)}{H(x)} = \frac{-x f(x)}{F(x) \ln \bar{F}(x)}$

$= \frac{d \ln(-\ln \bar{F}(x))}{d \ln x}$, to otrzymujemy następującą funkcję

$$L^*(k) = \frac{\ln \frac{\ln \bar{F}(k)}{\ln \bar{F}(k-1)}}{\ln \frac{k}{k-1}} \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots,$$

którą będziemy nazywać dyskretną alternatywną intensywnością starzenia.

Zauważmy, że pomiędzy dyskretną intensywnością starzenia a dyskretną alternatywną intensywnością starzenia zachodzi natępująca zależność

$$L^*(k) = \frac{\ln \frac{k}{k-L(k)}}{\ln \frac{k}{k-1}} \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots$$

W literaturze [L27] znany jest fakt, że intensywność uszkodzeń r dyskretnej zmiennej losowej K o nośniku $\{1, 2, \dots\}$, w jednoznaczny sposób określa rozkład tej zmiennej

$$F(k) = 1 - \exp \left(- \sum_{i=1}^k r(i) \right) \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots$$

W pracy [O6] pokazano, że również znając dyskretną intensywność starzenia lub dyskretną alternatywną intensywność starzenia zmiennej losowej możemy scharakteryzować rozkład tej zmiennej. Tak jak dla przypadku ciągłego nie jest to charakteryzacja jednoznaczna.

Twierdzenie 4 ([O6]). *Niech $L : \{1, 2, \dots\} \rightarrow (0, +\infty)$ spełnia następujące warunki:*

$$\prod_{i=2}^k \left[\left(1 - \frac{L(i)}{i} \right) \right]^{-1} < +\infty = \prod_{i=2}^{+\infty} \left[\left(1 - \frac{L(i)}{i} \right) \right]^{-1}$$

dla wszystkich $k \in \{2, 3, \dots\}$. Wtedy L jest dyskretną intensywnością starzenia rodziny zmiennych losowych o nośniku $\{1, 2, \dots\}$ i dystrybuancie postaci

$$F(k) = 1 - \exp \left\{ -\kappa \left[\prod_{i=2}^k \left(1 - \frac{L(i)}{i} \right) \right]^{-1} \right\} \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots$$

i każdego $\kappa \in (0, +\infty)$, gdzie $F(1) = 1 - \exp(-\kappa)$.

Twierdzenie 5 ([O6]). Niech $L^* : \{2, 3, \dots\} \rightarrow (0, +\infty)$ spełnia następujące warunki:

$$\prod_{i=2}^k \left(\frac{i}{i-1} \right)^{L^*(i)} < +\infty = \prod_{i=2}^{+\infty} \left(\frac{i}{i-1} \right)^{L^*(i)}$$

dla wszystkich $k \in \{2, 3, \dots\}$. Wtedy L^* jest dyskretną alternatywną intensywnością starzenia rodziny zmiennych losowych o nośniku $\{1, 2, \dots\}$ i dystrybucie

$$F(k) = 1 - \exp \left\{ -\kappa \left[\prod_{i=2}^k \left(\frac{i}{i-1} \right)^{L^*(i)} \right] \right\} \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots$$

i każdego $\kappa \in (0, +\infty)$, gdzie $F(1) = 1 - \exp(-\kappa)$.

Oznacza to, że znając dyskretną intensywność starzenia lub dyskretną alternatywną intensywność starzenia zmiennej losowej, opisującej na przykład liczbę poprawnie wykonanych operacji do momentu uszkodzenia obiektu, możemy rozpoznać rodzinę rozkładów dyskretnych, do której ta zmienna należy. Jest to rodzina z pewnym skalującym parametrem κ . Pozostałe parametry otrzymanej rodziny rozkładów można wyznaczyć na podstawie jednej z dwóch dyskretnych intensywności starzenia. W niektórych przypadkach charakteryzacja za pomocą jednej z tych funkcji może być prostsza, ze względu na łatwiejszy do rozpoznania kształt funkcji. Na przykład dla dyskretnego rozkładu Weibulla (I) (patrz [L16]) dyskretna alternatywna intensywność starzenia jest funkcją stałą, a dyskretna intensywność starzenia jest trudniejszą do identyfikacji funkcją wymierną. Natomiast dla rozkładu geometrycznego obie funkcje są stałe i równe 1 [O6].

4.3.6 Charakteryzacje za pomocą wektora intensywności starzenia

W teorii niezawodności do analizy czasu życia układów złożonych z dwóch składowych używa się często dwuwymiarowych zmiennych losowych absolutnie ciągłych. Niech zatem (X_1, X_2) będzie dwuwymiarową absolutnie ciągłą zmienną losową o nośniku $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Dla takiej zmiennej definiujemy następujące funkcje:

- $\bar{F}(x, y) = P(X_1 > x, X_2 > y)$ funkcja niezawodności,

- $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = 1 - \bar{F}(x, 0) - \bar{F}(0, y) + \bar{F}(x, y)$ dystrybuanta,
- $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \bar{F}(x, y)}{\partial x \partial y}$ funkcja gęstości.

Ponadto można dla niej wyznaczyć:

- $\mathbf{r}(x, y) = (r_1(x, y), r_2(x, y))$ gradient intensywności uszkodzeń ([L9]), gdzie $r_1(x, y) = -\frac{\partial \ln \bar{F}(x, y)}{\partial x}$ i $r_2(x, y) = -\frac{\partial \ln \bar{F}(x, y)}{\partial y}$,
- $\mathbf{H}(x, y) = (H_1(x, y), H_2(x, y))$ wektor średnich intensywności uszkodzeń, gdzie $H_1(x, y) = \frac{1}{x} \int_0^x r_1(u, y) du$ i $H_2(x, y) = \frac{1}{y} \int_0^y r_2(x, v) dv$,
- $\mathbf{L}(x, y) = (L_1(x, y), L_2(x, y))$ wektor intensywności starzenia, gdzie $L_1(x, y) = \frac{r_1(x, y)}{H_1(x, y)} = \frac{-\frac{\partial \ln \bar{F}(x, y)}{\partial x}}{\frac{1}{x} \int_0^x r_1(u, y) du}$ i $L_2(x, y) = \frac{r_2(x, y)}{H_2(x, y)} = \frac{-\frac{\partial \ln \bar{F}(x, y)}{\partial y}}{\frac{1}{y} \int_0^y r_2(x, v) dv}$.

W literaturze znany jest fakt, że gradient intensywności uszkodzeń dwuwymiarowej zmiennej losowej absolutnie ciągłej jednoznacznie determinuje jej rozkład. Zauważmy, że dla zmiennych dwuwymiarowych znając gradient intensywności uszkodzeń, łatwiej jest wyznaczyć funkcję niezawodności niż dystrybuantę.

Fakt 5 ([L12]). *Gradient intensywności uszkodzeń \mathbf{r} dwuwymiarowej zmiennej losowej absolutnie ciągłej (X, Y) o nośniku $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ jednoznacznie determinuje jej funkcję niezawodności \bar{F} poprzez następujące zależności.*

(a) *Po pierwsze, \bar{F} może być określona jako*

$$\bar{F}(0, y) = \exp\left(-\int_0^y r_2(0, v) dv\right) \quad \text{dla } y \in (0, +\infty),$$

$$\bar{F}(x, y) = \bar{F}(0, y) \exp\left(-\int_0^x r_1(u, y) du\right) \quad \text{dla } x, y \in (0, +\infty).$$

(b) Podobnie, \bar{F} może być określona jako

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, 0) &= \exp\left(-\int_0^x r_1(u, 0)du\right) \quad \text{dla } x \in (0, +\infty), \\ \bar{F}(x, y) &= \bar{F}(x, 0) \exp\left(-\int_0^y r_2(x, v)dv\right) \quad \text{dla } x, y \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

Znając wektor intensywności starzenia dwuwymiarowej zmiennej losowej absolutnie ciągłej można także scharakteryzować jej rozkład, ale nie jest to charakteryzacja jednoznaczna.

Twierdzenie 6 ([O1]). *Niech $L_1, L_2 : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ spełniają następujące warunki:*

$$\begin{aligned}\int_a^c \frac{L_1(u, y)}{u} du < +\infty &= \int_0^a \frac{L_1(u, y)}{u} du = \int_a^{+\infty} \frac{L_1(u, y)}{u} du \\ \int_b^d \frac{L_2(x, v)}{v} dv < +\infty &= \int_0^b \frac{L_2(x, v)}{v} dv = \int_b^{+\infty} \frac{L_2(x, v)}{v} dv\end{aligned}$$

dla wszystkich $0 < a < c < +\infty$ and $0 < b < d < +\infty$. Wtedy $\mathbf{L} = (L_1, L_2)$ jest wektorem intensywności starzenia rodziny rozkładów o funkcji niezawodności danej wzorami.

(a) Po pierwsze, \bar{F} może być dana jako

$$\begin{aligned}\bar{F}(0, y) &= \exp\left[-\kappa_2 \exp\left(\int_b^y \frac{L_2(0, v)}{v} dv\right)\right], \\ \bar{F}(a, y) &= \exp\left[-\kappa_1 + (\kappa_1 - \kappa_{12}) \exp\left(\int_b^y \frac{L_2(a, v)}{v} dv\right)\right], \\ \bar{F}(x, y) &= \bar{F}(0, y) \exp\left[\exp\left(\int_a^x \frac{L_1(u, y)}{u} du\right) \ln \frac{\bar{F}(a, y)}{\bar{F}(0, y)}\right],\end{aligned}$$

dla dowolnych $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$, spełniających zależności $0 < \kappa_i < \kappa_{12} < +\infty$ dla $i = 1, 2$ oraz $1 - \exp(-\kappa_1) - \exp(-\kappa_2) + \exp(-\kappa_{12}) \geq 0$ i dowolnych $a, b > 0$.

(b) Podobnie, \bar{F} może być dane jako,

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, 0) &= \exp \left[-\kappa_1 \exp \left(\int_a^x \frac{L_1(u, 0)}{u} du \right) \right], \\ \bar{F}(x, b) &= \exp \left[-\kappa_2 + (\kappa_2 - \kappa_{12}) \exp \left(\int_a^x \frac{L_1(u, b)}{u} du \right) \right], \\ \bar{F}(x, y) &= \bar{F}(x, 0) \exp \left[\exp \left(\int_b^y \frac{L_2(x, v)}{v} dv \right) \ln \frac{\bar{F}(x, b)}{\bar{F}(x, 0)} \right],\end{aligned}$$

dla dowolnych $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$, spełniających zależności $0 < \kappa_i < \kappa_{12} < +\infty$ dla $i = 1, 2$ oraz $1 - \exp(-\kappa_1) - \exp(-\kappa_2) + \exp(-\kappa_{12}) \geq 0$ i dowolnych $a, b > 0$.

Co więcej, dla pewnych określonych dwuwymiarowych absolutnie ciągłych zmiennych losowych, parametry $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ muszą spełniać dodatkowe warunki, zależne od własności łącznej funkcji niezawodności.

Oznacza to, że znając wektor intensywności starzenia zmiennej losowej dwuwymiarowej absolutnie ciągłej, opisującej na przykład czas życia układu złożonego z dwóch składowych, możemy rozpoznać rodzinę rozkładów dwuwymiarowych absolutnie ciągłych, do której ta zmienna należy. Jest to rodzina ze skalującymi parametrami $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$. Pozostałe parametry rozkładu są ustalone i da się je wyznaczyć na podstawie wektora intensywności starzenia.

W literaturze niezawodnościowej znany jest rozkład zwany dwuwymiarowym rozkładem Weibulla, $BVW(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, taki że dla $x, y \in (0, +\infty)$, parametry $\lambda_1, \lambda_2 > 0, 0 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1 \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ oraz

- funkcja niezawodności dana jest wzorem

$$\bar{F}(x, y) = \exp [- (\lambda_1 x^{\alpha_1} + \lambda_2 y^{\alpha_2} + \lambda_3 x^{\alpha_1} y^{\alpha_2})],$$

- gradient intensywności uszkodzeń równa się

$$\mathbf{r}(x, y) = (\alpha_1 x^{\alpha_1 - 1} (\lambda_1 + \lambda_3 y^{\alpha_2}), \alpha_2 y^{\alpha_2 - 1} (\lambda_2 + \lambda_3 x^{\alpha_1})),$$

- a wektor intensywności starzenia ma obie współrzędne stałe

$$\mathbf{L}(x, y) = (\alpha_1, \alpha_2).$$

Szczególnym przypadkiem dwuwymiarowego rozkładu Weibulla dla $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ jest dwuwymiarowy rozkład wykładniczy $BVExp(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (zdefiniowany w pracy [L7]). Dla wspomnianych powyżej rozkładów z Twierdzenia 6 wynika, że

$$\mathbf{L}(x, y) = (\alpha_1, \alpha_2) \iff (X_1, X_2) \text{ ma rozkład } BVW(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

oraz

$$\mathbf{L}(x, y) = (1, 1) \iff (X_1, X_2) \text{ ma rozkład } BVExp(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Przykład 3. Z analizowanego przykładu wynika, że znając wektor intensywności starzenia zmiennej losowej dwuwymiarowej absolutnie ciągłej, możemy rozpoznać rodzinę rozkładów, do której ta zmienna należy. Dane ([L14]) dotyczą meczów piłkarskich na etapie grupowym Ligi Mistrzów UEFA w latach 2004–2005 i 2005–2006, w których co najmniej jeden gol (traktowany jako porażka drużyny przeciwnej) został strzelony z rzutu bezpośredniego przez dowolną drużynę i co najmniej jeden gol został strzelony przez drużynę gospodarzy (Tablica 2), gdzie X_1 jest czasem (w minutach) pierwszego gola strzelonego z rzutu bezpośredniego przez dowolną drużynę, a X_2 czasem pierwszego gola dowolnego typu strzelonego przez drużynę gospodarzy.

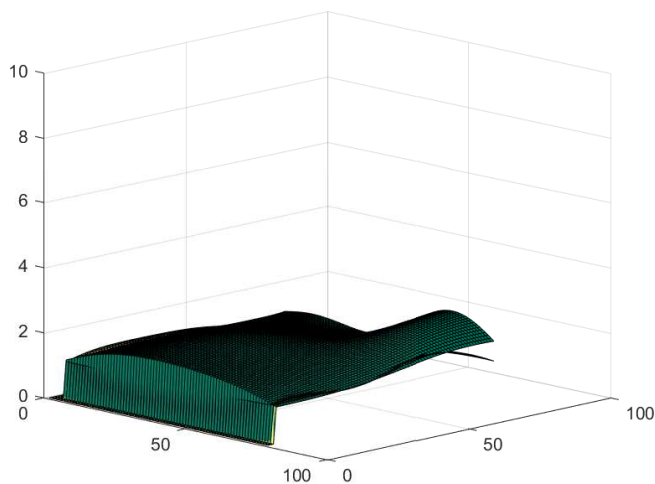
Na podstawie wstępnej analizy wykresu wektora $\hat{\mathbf{L}}(x, y) = (\hat{L}_1(x, y), \hat{L}_2(x, y))$ (Rysunek 5) możemy przyjąć, że oscyluje on wokół wektora o stałych współrzędnych $(1, 1)$. Zgodnie z Twierdzeniem 6 oznacza to, że zmienna (X_1, X_2) ma dwuwymiarowy rozkład wykładniczy.

Nasze badania potwierdzają wyniki otrzymane w pracy [L21], gdzie wyznaczono estymatory parametrów $BVExp(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ metodą Monte Carlo z wykorzystaniem łańcuchów Markowa, $\hat{\lambda}_1 = 0.0238$, $\hat{\lambda}_2 = 0.0293$, $\hat{\lambda}_3 = 0.0001$.

Analogiczne wyniki dotyczące charakteryzacji dwuwymiarowych zmiennych losowych dyskretnych za pomocą wektorów dyskretnych intensywności starzenia, zostały przedstawione w pracy [O4].

Tablica 2: Liga Mistrzów UEFA

2005–2006	X_1	X_2	2004–2005	X_1	X_2
Lyon–Real Madrid 3–0	26	20	Internazionale–Bremen 2–0	34	34
Milan–Fenerbahce 3–1	63	18	Real Madrid–Roma 4–2	53	39
Chelsea–Anderlecht 1–0	19	19	Man. United–Fenerbahce 6–2	54	7
Club Brugge–Juventus 1–2	66	85	Bayern–Ajax 4–0	51	28
Fenerbahce–PSV 3–0	40	40	Moscow–PSG 2–0	76	64
Internazionale–Rangers 1–0	49	49	Barcelona–Shakhtar 3–0	64	15
Panathinaikos–Bremen 2–1	8	8	Leverkusen–Roma 3–1	26	48
Ajax–Arsenal 1–2	69	71	Arsenal–Panathinaikos 1–1	16	16
Man. United–Benfica 2–1	39	39	Dynamo Kyiv–Real Madrid 2–2	44	13
Real Madrid–Rosenborg 4–1	82	48	Man. United–Sparta 4–1	25	14
Villarreal–Benfica 1–1	72	72	Bayern–M. Tel–Aviv 5–1	55	11
Juventus–Bayern 2–1	66	62	Bremen–Internazionale 1–1	49	49
Club Brugge–Rapid 3–2	25	9	Anderlecht–Valencia 1–2	24	24
Olympiacos–Lyon 1–4	41	3	Panathinaikos–PSV 4–1	44	30
Internazionale–Porto 2–1	16	75	Arsenal–Rosenborg 5–1	42	3
Schalke–PSV 3–0	18	18	Liverpool–Olympiacos 3–1	27	47
Barcelona–Bremen 3–1	22	14	M. Tel–Aviv–Juventus 1–1	28	28
Milan–Schalke 3–2	42	42			
Bremen–Panathinaikos 5–1	2	2			
Rapid–Juventus 1–3	36	52			



Rysunek 5: Estymator $\hat{L}(x, y)$

4.3.7 Podsumowanie

Na podstawie przeprowadzonych badań pokazano, że funkcje intensywności starzenia mogą służyć do charakteryzacji zmiennych losowych opisujących

czas życia obiektu. W niektórych sytuacjach były to charakteryzacje jednoznaczne, ale w większości przypadków intensywność starzenia zmiennej losowej pozwala jedynie rozpoznać rodzinę rozkładów, do której ta zmienna należy. Są to rodziny ze skalującym parametrem (lub w przypadku dwuwymiarowym, trzema parametrami skalującymi). Pozostałe parametry rozkładów można wyznaczyć na podstawie funkcji intensywności starzenia.

Pokazano także, że uogólniona intensywność starzenia ma związek z porządkiem gwiazdzistym i innymi porządkami stochastycznymi oraz pozwala ustalić, który z badanych obiektów ma mniejszą zawodność.

W zaprezentowanych przykładach, na podstawie danych rzeczywistych, dotyczących czasów życia do momentu porażki, oraz danych wygenerowanych, wyestymowano funkcję intensywności starzenia i rozpoznano rodziny rozkładów czasu życia, z których te dane pochodzą. W niektórych przykładach, na podstawie wyestymowanej intensywności starzenia, wyznaczono także estymatory parametrów odpowiednich rozkładów.

Próba uogólnienia dyskretnych intensywności starzenia oraz wektorów intensywności starzenia dla zmiennych losowych dwuwymiarowych będzie przedmiotem moich dalszych badań.

4.4 Najważniejsze referaty

Oto lista najważniejszych referatów, dotyczących podstawowego osiągnięcia naukowego, wygłoszonych przeze mnie na międzynarodowych i krajowych konferencjach oraz seminariach.

- [R1] *Analiza czasu życia za pomocą funkcji intensywności starzenia*, seminarium IM PAN, 20.12.2018, Warszawa.
- [R2] *Support dependent generalized aging intensities*, XLIV Konferencja *Statystyka Matematyczna*, 02-07.12.2018, Będlewo.
- [R3] *Measures of aging tendency – referat zaproszony*, międzynarodowa konferencja *International Conference on Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference*, 20-24.08.2018, Będlewo.
- [R4] *Generalized aging intensity functions*, międzynarodowa konferencja *13th International Conference on Ordered Statistical Data*, 22-25.05.2018, Kadyks.
- [R5] *Analiza niezawodności obiektu za pomocą funkcji intensywności starzenia*, seminarium Instytutu Automatyki i Robotyki, Politechnika Poznańska, 21.03.2018, Poznań.
- [R6] *Zastosowanie funkcji intensywności starzenia*, XLIII Konferencja *Statystyka Matematyczna*, 04-08.12.2017, Będlewo.
- [R7] *Charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa za pomocą wybranych funkcji z teorii niezawodności*, seminarium IBS PAN, 27.10.2017, Warszawa.
- [R8] *Characterizations of distributions through the aging intensity*, międzynarodowa konferencja *10th International Conference on Mathematical Methods in Reliability*, 03-06.07.2017, Grenoble.
- [R9] *Characterizations of bivariate distributions through the vector of aging intensities*, międzynarodowe spotkanie badawcze *Ordered Statistical Data meeting in Będlewo*, 29.05-02.06.2017, Będlewo.

- [R10] *Charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa za pomocą wybranych funkcji z teorii niezawodności*, wykłady środowiskowe ze statystyki wielowymiarowej, Wydział Matematyki i Informatyki UAM, 15.03.2017, Poznań.
- [R11] *Characterizations of distributions through aging intensity*, XLII Konferencja *Statystyka Matematyczna*, 27.11-02.12.2016, Będlewo.
- [R12] *Charakteryzacje dyskretnych rozkładów Weibulla*, XLI Konferencja *Statystyka Matematyczna*, 07-11.12.2015, Będlewo.
- [R13] *Properties of aging intensity functions*, międzynarodowe spotkanie badawcze *Ordered Statistical Data meeting in Będlewo*, 20-25.09.2015, Będlewo.
- [R14] *Charakteryzacje odwróconych rozkładów Weibulla* oraz współautorstwo referatu *Charakteryzacje rozkładów Weibulla*, XL Konferencja *Statystyka Matematyczna*, 01-05.12.2014, Będlewo.
- [R15] *Characterizations of Weibull distributions through selected functions of reliability theory*, międzynarodowe seminarium *Seminari di Statistica, Probabilita' e Ottimizzazione*, Politecnico di Torino, 12.06.2014, Turyn.
- [R16] *Characterizations of Weibull distributions through selected functions of reliability theory*, międzynarodowa konferencja *11th International Conference on Ordered Statistical Data*, 02-06.06.2014, Będlewo.
- [R17] *Properties of aging intensity and reversed aging intensity functions*, międzynarodowa konferencja *11th International Conference on Ordered Statistical Data*, 02-06.06.2014, Będlewo.
- [R18] *Charakteryzacje rozkładów za pomocą wybranych funkcji z teorii niezawodności*, seminarium IM PAN, 27.02.2014, Warszawa.
- [R19] *Charakteryzacje rozkładów za pomocą wybranych funkcji z teorii niezawodności*, XXXIX Konferencja *Statystyka Matematyczna*, 02-06.12.2013, Wisła.

5 Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

W poniższych punktach omawiam pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze, niewchodzące w skład ww. osiągnięcia. Są to następujące cztery tematy badawcze:

1. Grafy przecięć a problem optymalizacji macierzy bramkowych;
2. Analiza danych medycznych i medyczne systemy ekspertowe;
3. Reguły produkcji z niepewnością;
4. Statystyki porządkowe i wartości rekordowe.

5.1 Grafy przecięć a problem optymalizacji macierzy bramkowych

Problem decyzyjny optymalizacji macierzy bramkowych, zwany problemem k -GML (Gate Matrix Layout), można sformułować w następujący sposób. Dana jest macierz zero-jedynkowa M o wymiarach $n \times m$ oraz liczba całkowita k . Pytamy, czy istnieje taka permutacja kolumn macierzy, że gdy zamienimy na \star -ki wszystkie zera znajdujące się w danych wierszach między dwoma jedynkami, to żadna kolumna macierzy nie zawiera łącznie więcej niż k jedynek i \star -ek. Gdy taka permutacja istnieje, to mówimy, że macierz M jest *pozytywna* dla problemu k -GML.

Rozważamy losową macierz zero-jedynkową, którą oznaczmy $R(n, m, p)$. Jest to macierz o wymiarach $n \times m$, w której liczba kolumn jest całkowitą dodatnią potęgą rzeczywistej α liczby jej wierszy: $m = \lfloor n^\alpha \rfloor$ i każdy element macierzy jest jedynką z prawdopodobieństwem p albo zerem z prawdopodobieństwem $1 - p$ (niezależnie jeden od drugiego).

Rozstrzygając problem optymalizacji macierzy bramkowych dla macierzy losowej $R(n, m, p)$ pytamy, czy macierz ta *nie jest pozytywna* dla problemu k -GML. Tę własność macierzy oznaczmy przez \mathcal{P}_k . Przedmiotem badań jest próba wyznaczenia funkcji progowej dla tej własności przy $k \geq 3$ i określenie warunków, jakie musi spełniać p i α , aby prawdopodobieństwo zdarzenia, że odpowiednio “duża” (przy $n \rightarrow \infty$) losowa macierz zero-jedynkowa ma własność \mathcal{P}_k , dążyło do zera lub do jeden. W badaniach związanych z problemem optymalizacji macierzy bramkowych wykorzystuje się losowe grafy przecięć.

Wynikiem prowadzonych badań dla $k = 3$ jest praca (opublikowana przed uzyskaniem tytułu doktora):

- [P1] Karoński, M., SZYMKOWIAK, M. (2001). On a solution of a randomized three tracks variant of the Gate Matrix Layout problem. *Discrete Mathematics*, Vol(236), s. 179–189. **IF JCR 0.301, MNiSW 15 p.**

Badania dla $k > 3$ były kontynuowane również po uzyskaniu tytułu doktora i ich wyniki zostały zaprezentowane w referatach:

- [R20] SZYMKOWIAK, M. (2014). *Grafy przecięć a problem optymalizacji macierzy bramkowych GML*, seminarium poświęcone grafom przecięć (pod przewodnictwem prof. dr. hab. Jerzego Jaworskiego), Wydział Matematyki i Informatyki UAM, Poznań.
- [R21] SZYMKOWIAK, M. (2014). *A randomized k tracks variant of the Gate Matrix Layout problem*, konferencja międzynarodowa *5th Polish Combinatorial Conference*, Będlewo.

Prace nad grafami przecięć oraz problemem optymalizacji macierzy bramkowych były także związane z udziałem w

- międzynarodowych konferencjach *International Conference on Random Structures and Algorithms* (m.in. 18th RS&A, 07-11.09.2017, Gniezno, udział w organizacji konferencji)
- odbywających się dwa razy w roku seminariach międzynarodowych *Berlin-Poznań-Hamburg Seminar* poświęconych kombinatoryce i teorii grafów
- cotygodniowych seminariach Zakładu Matematyki Dyskretnej UAM w Poznaniu

5.2 Analiza danych medycznych i medyczne sytemy ekspertowe

W związku z wciąż postępującym rozwojem nauk medycznych, korzystanie przez lekarza tylko z własnych, nawet bardzo bogatych doświadczeń przy podejmowaniu decyzji diagnostycznych i terapeutycznych, jest niewystarczające. Oprócz podstawowych źródeł fachowej wiedzy medycznej, jakimi są podręczniki i specjalistyczne czasopisma medyczne, istotnym źródłem aktualnej wiedzy medycznej jest wiedza praktyczna lekarzy specjalistów, zdobywana przez nich w wyniku długoletnich obserwacji pacjentów. W tym świetle, celowe wydaje się zbudowanie bazy wiedzy, której podstawę stanowiłaby

wspomniana wiedza praktyczna. Problem stanowi akwizycja, czyli pozyskiwanie danych do tej bazy wiedzy oraz ich strukturalizacja, czyli zapis danych w jednolitej formie i ich przetworzenie do takiej postaci, aby wiedzę zdobytą w wyniku obserwacji licznych pacjentów można było zintegrować i wykorzystać do budowy medycznego systemu ekspertowego.

W projektowaniu medycznego systemu ekspertowego cenne źródło wiedzy stanowi ewidencja medyczna. Jeżeli z ewidencji wynika, że u szerokiej grupy pacjentów jednostka chorobowa ma podobny, ściśle określony przebieg, to ta wiedza może posłużyć do sformułowania precyzyjnych zasad diagnostyki i leczenia przedmiotowej choroby. Wydaje się, że naturalne, bardzo cenne, a wciąż w niewielkim stopniu wykorzystane źródło wiedzy, stanowią dane medyczne zapisane w kartotekach pacjentów indywidualnych. Odpowiednia forma zapisu danych medycznych oraz wybór właściwej techniki ich eksploatacji umożliwią odkrywanie istotnych, często niespodziewanych, zależności między danymi. Zależności te mogą być wyrażone w postaci reguł produkcji będących ważną częścią bazy wiedzy medycznych systemów ekspertowych. W zamierzeniu, systemy ekspertowe mają pomagać lekarzowi w podjęciu właściwych decyzji dotyczących postępowania w leczeniu różnych, często rzadko spotykanych, z punktu widzenia lekarza, chorób.

Przykładem dziedziny, w której mamy do czynienia z różnymi formatami danych medycznych jest okulistyka. W badaniach przedstawiono m.in. istotę akwizycji i strukturalizacji danych różnoformatowych na podstawie analizy procesu diagnostyki i leczenia jaskry, często spotykanej i bardzo dotkliwej choroby oczu.

Wynikiem prowadzonych badań są następujące publikacje:

[P2] Jankowska, B., SZYMKOWIAK, M. (2010). Designing Medical Production Rules from Semantically Integrated Data. *Journal of Medical Informatics & Technologies*, 14, 95–102.

MNiSW 6 p.

[P3] SZYMKOWIAK, M., Jankowska, B. (2010). Reliability of Medical Production Rules Obtained by means of Aggregate Data Mining. *Journal of Medical Informatics & Technologies*, 14, 103–110.

MNiSW 6 p.

[P4] SZYMKOWIAK, M., Jankowska, B. (2009). Discovering Medical Knowledge from data in Patients' Files. *Proc. of ICCCI 2009, Lecture Notes*

in Computer Science (Lecture Notes in Artificial Intelligence), Red.: Nguyen, N.T., Kowalczyk, R., Chen, S. M., Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 5796, 128–139.

MNiSW 13 p.

- [P5] Jankowska, B.M., Zwierzyński, K.T., SZYMKOWIAK, M. (2009). Cost-Effectiveness Analysis of Transferring Medical Data over P2P Network. *Conference: International Conference on Computers in Medical Activity, Book series Advances in Soft Computing. Computers in Medical Activity*, Red.: Kački, E., Rudnicki, M., Stempczyńska, J., Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 65, 201–210.
- [P6] Jankowska, B., Szymkowiak, M. (2009). Algorithm for Designing Production Rules from Data Stored in Registers of Clinical Trials, in: *Proc. of the 7th Conf. on Computer Methods and Systems*, Kraków.
- [P7] Jankowska, B., SZYMKOWIAK, M. (2008). How to Acquire and Structuralize Knowledge for Medical Rule-Based Systems? *Knowledge-Driven Computing. Knowledge Engineering and Intelligent Computations*, Red.: Cotta, C., Schaefer, R., Ligęza, A., Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 102, 99–116.
- [P8] SZYMKOWIAK, M., Jankowska, B., Zwierzyński, K. (2007). Analysis of Effectiveness of Medical Data Transfer over P2P Network, in: *Proc. of the Conf. on Computers in Medical Activity*, Red.: Kački, E. et al., Łódź, 93–94 (extended abstract).
- [P9] SZYMKOWIAK, M., Jankowska, B., Zwierzyński, K. (2007). Designing of medical Rule-Based Systems from Heterogenous Data, in: *Proc. of the 6th Conf. on Computer Methods and Systems*, Kraków, 53– 58.
- [P10] Jankowska, B., SZYMKOWIAK, M. (2005). Knowledge Acquisition for Medical Expert Systems, in: *Proc. of the 5th Conf. on Computer Methods and Systems*, vol.1, Kraków, 319–328.

Wyniki analizy danych medycznych oraz prac nad medycznymi sytemami ekspertowymi były także przedstawione podczas:

- [R22] referatu *Metody statystyczne w odkrywaniu wiedzy na podstawie danych medycznych*, XXXV Konferencja *Statystyka Matematyczna*, 07-11.12.2009, Wisła.

- zebrań związanych z projektowaniem i implementacją systemu eksperckiego OCULUS, przeznaczonego do wspomagania diagnostyki i leczenia wybranych schorzeń okulistycznych (pod kierunkiem dr inż. Beaty Jankowskiej, od roku 2016)

5.3 Reguły produkcji z niepewnością

W wielu miejscach wiarygodny system doradczy może stanowić realne wsparcie w podejmowaniu istotnych decyzji. Ważną część bazy wiedzy takiego systemu stanowią reguły produkcji. Przedmiotem badań są metody otrzymywania reguł produkcji z niepewnością w wyniku integracji rzeczywistych danych o reprezentacji atrybutowej.

W celu ustalenia rankingu reguły w tworzonym systemie doradczym zaproponowano, by każda projektowana reguła produkcji z niepewnością była opatrzona dwoma współczynnikami wiarygodności. Pierwszym z nich jest współczynnik wewnętrznej wiarygodności reguły *irf*, określający szansę zajścia konkluzji reguły pod warunkiem pewnego zajścia jej przesłanek. Drugi to współczynnik globalnej wiarygodności reguły *grf*, określający priorytet tworzonej reguły względem pozostałych reguł w bazie wiedzy systemu doradczego. W badaniach wykorzystano metody probabilistyczne i statystyczne służące do projektowania reguł produkcji z niepewnością oraz do wyznaczenia ich współczynników wiarygodności.

Wynikiem prowadzonych badań są następujące publikacje:

- [P11] Jankowska, B., SZYMKOWIAK, M. (2013). Machine Ranking of 2-Uncertain Rules Acquired from Real Data. *Transactions on Computational Collective Intelligence XI, Lecture Notes in Computer Science*, Red.: Nguyen, N.T. et al., Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 8065, 198–222.

MNiSW 5 p.

- [P12] SZYMKOWIAK, M. (2012). Some Examples Of Reasoning With 2-Uncertain Rules. *Journal of Medical Informatics & Technologies*, 20, 49–57.

MNiSW 5 p.

- [P13] Jankowska, B., SZYMKOWIAK, M. (2011). On Ranking Production Rule for Rule-Based Systems with Uncertainty. *Proc. of ICCCI 2011, Part I, Lecture Notes in Computer Science*, Red.: Jędrzejowicz, P. et al., Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 6922, 546–556.

Wyniki prac związanych z problemem reguł produkcji z niepewnością były także zaprezentowane w referacie:

- [R23] *Precyzja estymacji przedziałowej dla frakcji jako miara wiarygodności reguł z niepewnością*, XXXVII Konferencja *Statystyka Matematyczna*, 05-09.12.2011, Wisła.

5.4 Statystyki porządkowe i wartości rekordowe

W badaniach zaproponowano charakteryzacje rozkładu wykładniczego w klasach funkcji niezawodności NBU/NWU (New Better than Used/New Worse than Used) oraz IFRA/DFRA (Increasing Failure Rate Average/Decreasing Failure Rate Average). W charakteryzacjach wykorzystano porządek stochastyczny, złożony rozkład Pascala, statystyki porządkowe, wartości rekordowe, wartości rekordowe z indeksem o rozkładzie Pascala oraz sumę zmiennych losowych.

Wynikiem prowadzonych badań jest publikacja:

- [P14] Iwińska, M., SZYMKOWIAK, M. (2016). Characterizations of the exponential distribution by Pascal compound. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 45(1), 63–70.

IF JCR 0.311, MNiSW 15 p.

Prace nad problemem statystyk porządkowych i wartości rekordowych były także związane z referatami:

- [R24] SZYMKOWIAK, M., Iwińska, M. (2012). *Charakteryzacja rozkładu wykładniczego*, XXXVIII Konferencja *Statystyka Matematyczna*, Wisła.
- [R25] Iwińska, M., SZYMKOWIAK, M. (2011). *Wartości rekordowe o losowych indeksach*, XXXVII Konferencja *Statystyka Matematyczna*, Wisła.

6 Wskaźniki służące do oceny dorobku naukowego

W ujęciu syntetycznym, mój dorobek publikacyjny obejmuje **21** prac (w tym 20 po uzyskaniu stopnia doktora):

Kategoria	<dr	≥ dr	Suma
Monografie naukowe w języku angielskim	0	1	1
Artykuły w czasopismach z listy MNiSW A (JCR)	1	7	8
Artykuły w czasopismach z listy MNiSW B	0	4	4
Rozdziały w monografii	0	3	3
Recenzowane prace w materiałach konf. międzynarod.	0	4	4
Opublikowane materiały dydaktyczne	0	1	1
Suma	1	20	21

Sumaryczny *Impact Factor IF* publikacji naukowych według listy *Journal Citation Reports JCR*, zgodnie z rokiem opublikowania (ponieważ nie są jeszcze znane wartości *IF* z 2018 roku, w przypadku publikacji z tego roku zastosowano *IF* z roku 2017) wynosi **8.726**, natomiast sumaryczna liczba punktów według Listy MNiSW publikacji naukowych, zgodnie z rokiem opublikowania – **190**:

Kategoria	<dr	≥ dr	Suma
Sumaryczny <i>Impact Factor IF</i>	0.301	7.974	8.276
Liczba punktów MNiSW	15	175	190

Liczba cytowań prac, według różnych baz publikacji, oraz Indeks Hirscha (h) wynoszą

Kategoria	liczba cytowań	bez autocytowań	h
wg bazy Web of Science	11	4	2
wg bazy Scopus	15	6	2
wg bazy Google Scholar	42	10	4

Mała liczba cytowań i związana z tym niska wartość Indeksu Hirscha wydają się być spowodowane tym, że opublikowane wyniki są bardzo świeże (aż trzy prace z jednotematycznego cyklu publikacji pochodzą z roku 2018, a jedna ma się ukazać w roku 2019).

7 Najważniejsze osiągnięcia dydaktyczno-organizacyjne

Do najważniejszych osiągnięć dydaktyczno-organizacyjnych należą:

- [P15] Iwińska, M., Popowska, B., SZYMKOWIAK, M. (2011). *Statystyka opisowa*, materiały dydaktyczne – slajdy do przedmiotu, w ramach projektu WIEDZA DLA GOSPODARKI, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, s. 188, ISBN: 978-83-7775-016-2.
- SZYMKOWIAK, M. (2014). *Descriptive Statistics*, materiały dydaktyczne w języku angielskim, w ramach projektu INŻYNIER PRZYSZŁOŚCI. WZMOCNIENIE POTENCJAŁU DYDAKTYCZNEGO PP – na kierunku ENGINEERING WITH COMMERCE na Wydziale Inżynierii Zarządzania, Politechnika Poznańska – materiały przygotowane do publikacji.
 - wykłady w języku angielskim *Basic concepts of descriptive statistics*, prowadzone w ramach programu – LIFELONG LEARNING PROGRAMME – ERASMUS – TEACHING MOBILITY CONFIRMATION
 - Evry University, Institute of Sciences and Technology, 16-20.09.2013, Evry, Francja
 - Politecnico di Torino, Dipartimento di Scienze Matematiche, 09-13.06. 2014, Turyn, Włochy
 - Evry University, Institute of Sciences and Technology, 15-19.09.2014, Evry, Francja
 - wypromowanie kilku dyplomatów (prace licencjackie i magisterska) na kierunku matematyka, Wydział Elektryczny, Politechnika Poznańska
 - od roku 2015 prowadzenie w języku angielskim wykładu *Sensor Integration*, na specjalności SMART AEROSPACE AND AUTONOMOUS SYSTEMS (studia 2 stopnia, kierunek Automatyka i Robotyka, Wydział Informatyki, Politechnika Poznańska).
 - współautorstwo wniosku oraz odwołania – kierunek zamawiany MATEMATYK – ABSOLWENT WSZECHSTRONNY na Wydziale Elektrycznym, Politechnika Poznańska, (projekt oceniony pozytywnie – kierunek prowadzony w latach 2012-2015).

Pozostała literatura

- [L1] Azlarov, T.A., Volodin, N.A. (1986). *Characterization Problem Associated with the Exponential Distribution*. Springer-Verlag, New York.
- [L2] Barlow, R.E., van Zwet, W.R. (1969). Asymptotic properties of isotonic estimators for the generalized failure rate function. Part I. Strong consistency. *Nonparametric Techniques in Statistical Inference (Proc. Sympos., Indiana Univ., Bloomington, Ind., 1969)*, Cambridge Univ. Press, London, 159–176.
- [L3] Barlow, R.E., van Zwet, W.R. (1969). Asymptotic properties of isotonic estimators for the generalized failure rate function. Part II. Asymptotic distributions. *Operations Research Center Report ORC*, University of California, Berkeley, 69–110.
- [L4] Bhattacharjee, S., Nanda, A.K., Misra, S.Kr. (2013). Reliability analysis using ageing intensity function. *Statistics and Probability Letters*, 83, 1364–1371.
- [L5] Bowman, A.W., Azzalini, A. (1997). *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis*. Oxford University Press Inc., New York.
- [L6] Danielak, K., Rychlik, T. (2003). Sharp bounds for expectations of spacings from DDA and DFRA families. *Statistics and Probability Letters*, 65, 303–316.
- [L7] Gumbel, E.J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55, 698–707.
- [L8] Jiang, R., Ji, P., Xiao, X. (2003). Aging property of unimodal failure rate models. *Reliability Engineering and System Safety*, 79, 113–116.
- [L9] Johnson, N.L., Kotz, S. (1975). A vector multivariate hazard rate. *Journal of Multivariate Analysis*, 5, 53–66.
- [L10] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1994). *Continuous univariate distributions*. v.1. John Wiley & Sons, New York.
- [L11] Lai, C.D., Xie, M., Murthy, D.N.P. (2003). A modified Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, 52(1), 33–37.
- [L12] Marshall, A.W. Some comments on the hazard gradient. (1975). *Stochastic Process and their Applications*, 3, 293–300.

- [L13] Marshall, A.W., Olkin, I. (2007). *Life Distributions: Structure of Nonparametric, Semiparametric and Parametric Models*, Springer Series in Statistics, New York.
- [L14] Meintanis, S.G. (2007). Test of fit for Marshall-Olkin distributions with applications. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 3954–3963.
- [L15] Murthy, D. N. P., Xie, M., Jiang, R. (2004). *Weibull Models*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
- [L16] Nakagawa, T., Osaki, S. (1975). The discrete Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, R-24, 5, 300–301.
- [L17] Nanda, A.K., Bhattacharjee, S., Alam, S.S. (2007). Properties of aging intensity function. *Statistics and Probability Letters*, 77, 365–373.
- [L18] Navarro, J., Ruiz, J.M., del Aguila, Y. (2008). Characterization and ordering properties based on log-odds functions. *Statistics*, 42 (4), 313–328.
- [L19] Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *Annals of Statistics*, 3, 119–131.
- [L20] Roy, D., Gupta, R.P. (1992). Classifications of discrete lives. *Microelectron. Reliab.*, 32, 1459–1473.
- [L21] Santos, C.A., Achcar, J.A. (2010). Bivariate Exponential Distributions: A Bayesian Approach Using the WinBugs Software. *Revista Brasileira de Biometria*, 28, 104–125.
- [L22] Sydsæter, K., Hammond. P. (2012). *Essential Mathematics for Economic Analysis*. Pearson Education, London.
- [L23] SZYMKOWIAK, M. Measures of aging tendency, submitted.
- [L24] SZYMKOWIAK, M. Supports dependent generalized aging intensities, submitted.
- [L25] SZYMKOWIAK, M. Aging intensities vector for bivariate absolutely continuous distributions, in preparation.
- [L26] Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18, 293 – 296.
- [L27] Xie, M., Gaudoin, O., Bracquemond, C. (2002). Redefining failure rate function for discrete distributions. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 9(3), 275–285.

Mopolbene Supulovic