Afiniczne ciągłe automaty komórkowe i ich rola w rozwiązywaniu problemów klasyfikacji gęstości początkowej

(ang. *Affine continuous cellular automata and their role in solving density classification problems)*

mgr Marcin Dembowski

18 kwietnia 2024

Streszczenie

Automaty komórkowe (CAs, z ang. *Cellular Automata*) to układy dynamiczne, w których czas i przestrzeń są dyskretne. Najczęściej również stany komórek przyjmują wartości z ustalonego skończonego zbioru. Zmiany stanów w kolejnych krokach czasowych definiowane są za pomocą reguły lokalnej, która bierze pod uwagę stany najbliższych sąsiadów. Pomimo takiej prostej definicji, CAs charakteryzują się ciekawymi i złożonymi właściwościami, a przez to są chętnie wykorzystywane do modelowania zjawisk, szczególnie fizycznych. Badania teoretyczne najczęściej dotyczą najprostszych CAs dwustanowych, które są określone na jedno lub dwuwymiarowej kracie skończonej z periodycznymi warunkami brzegowymi.

Niniejsza rozprawa przedstawia wyniki moich badań nad ciągłymi afinicznymi automatami komórkowymi (ACCAs, z ang. *Affine Continuous CAs*), w których stany komórek przyjmują wartości w przedziale $[0, 1]$, a reguła lokalna jest funkcją afiniczną ze względu na każdą zmienną. Chociaż tak zdefiniowane CAs są najprostszym możliwym rozszerzeniem binarnych CAs do automatów ciągłych, to okazuje się, że ich dynamika jest o wiele bardziej złożona i ciekawa. Dla uzasadnienia tego stwierdzenia, w pracy zostały przedstawione wyniki szczegółowych badań zewnętrznie totalistycznych (ang. *Outer Totalistic*) ACCAs, pokazujące, że w obrębie tego zdawałoby się bardzo trywialnego podzbioru ACCAs można zaobserwować wszystkie możliwe „wrażliwości" spotykane w dynamice CAs.

W swojej pracy skupiam się przede wszystkim na możliwości wykorzystania ACCAs do rozwiązania jednego ze słynnych problemów teoretycznych dotyczących automatów komórkowych, tak zwanego problemu klasyfikacji gęstości początkowej (DCP, ang. *Density Classification Problem*), znanego również jako problem głosowania większościowego. W klasycznym sformułowaniu, DCP poszukuje binarnego automatu komórkowego, który potrafi prawidłowo sklasyfikować każdą binarną konfigurację początkową: jeśli zawiera więcej jedynek niż zer, to jako konfigurację końcową otrzymujemy konfigurację homogeniczną złożoną z samych jedynek, zaś jeśli zawiera więcej zer niż jedynek, to jako konfigurację końcową otrzymujemy konfigurację homogeniczną złożoną z samych zer. Niestety, zostało udowodnione, że nie istnieje binarny CA, który potrafi poprawnie sklasyfikować każdą konfigurację początkową, o dowolnej długości, tzn. klasyczna wersja DCP nie ma rozwiązania. Pojawia się zatem naturalne pytanie, czy „złagodzenie" wymagań dotyczących DCP, np. dopuszczenie jako rozwiązań innych CAs niż binarne lub zmiana warunków wyjściowych, pozwoli znaleźć klasyfikator działający poprawnie na wszystkich binarnych konfiguracjach początkowych.

W mojej pracy naukowej zajmuję się powyższym zagadnieniem w kontekście ACCAs. Badane przeze mnie automaty są jedno oraz dwuwymiarowe o promieniu sąsiedztwa równym 1 z periodycznymi warunkami brzegowymi (w przypadku dwuwymiarowych ACCA wykorzystywane jest sąsiedztwo von Neumanna). Przedstawione kompleksowe badania, opisy, eksperymenty, a także dowody analityczne wykazują, że o ile również dla ACCAs nie istnieje pojedyncza reguła lokalna pozwalająca na poprawną klasyfikację gęstości wszystkich binarnych konfiguracji początkowych przy klasycznym sformułowaniu warunku końcowego, to jego niewielka modyfikacja pozwala na znalezienie licznego podzbioru reguł ACCAs, które okazują się być poprawnymi rozwiązaniami. Okazuje się, że są to ACCAs, które zachowują gęstość.

Dodatkowo, badam możliwość rozwiązania klasycznego DCP przez ACCAs na jedno lub dwuwymiarowej kracie o ustalonym rozmiarze. W tym przypadku, okazuje się, że takie rozwiązania istnieją.

Większość rozdziałów mojej rozprawy doktorskiej została opublikowana w recenzowanych artykułach [1–5] oraz zreferowana na międzynarodowych konferencjach naukowych. Niniejsza dysertacja nie tylko zbiera wszystkie te prace i wystąpienia, ale prezentuje również wyniki dodatkowych symulacji i obliczeń. W przeciwieństwie

do chronologii publikacji, rozprawa przedstawia wyniki w kolejności wyjaśniającej najpierw podstawy tematyki, przechodząc do szczegółów zagadnień. Wszystkie opublikowane artykuły oraz prezentacje, są wynikiem pracy zespołowej. Jestem autorem wszystkich wizualizacji, symulacji, eksperymentów w opublikowanych artykułach i prezentacjach. Przeanalizowałem wyniki zebrane przy eksperymentach, które były podstawą do analitycznych dowodów i twierdzeń. Dowody twierdzeń były osiągnięte dzięki współpracy z Barbarą Wolnik [1–5] oraz Antonim Augustynowiczem [5]. Pozostali współautorzy artykułów wspierali badania poprzez dyskusję, weryfikację poprawność otrzymanych wyników czy też weryfikację artykułów.

Zawartość poszczególnych rozdziałów

Poniżej przedstawiam podsumowanie poszczególnych rozdziałów pracy podając ich oryginalne tytuły.

Rozdział 1 - ang. *Introduction*

Pierwszy rozdział rozprawy doktorskiej zawiera krótką historię i zastosowania automatów komórkowych. Wyjaśnia zasady gry w życie (ang. *Game of Life*) - najpopularniejszego dwuwymiarowego automatu komórkowego. Rozdział ten napisałem specjalnie na potrzeby poniższej dysertacji i jest on jedynie wstępem do ogólnej tematyki CAs.

Rozdział 2 - ang. *Preliminaries*

W rozdziale drugim podaję definicje potrzebne do opisania badań i ich wyników. Są to definicje ogólnie znane w literaturze i stosowane w moich publikacjach, jednakże na potrzeby rozprawy notacja została ujednolicona. Rozdział rozpoczyna się przedstawieniem i zdefiniowaniem kraty jednowymiarowej ($\mathcal{C}_1$) oraz dwuwymiarowej kraty prostokątnej ($\mathcal{C}_2$) z periodycznymi warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{0,1,\ldots,n-1\}\,,\\ \mathcal{C}_2 &= (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \{0,1,\ldots,n-1\}\times\{0,1,\ldots,m-1\}\,,\end{aligned}$$

gdzie n oraz m są liczbami naturalnymi większymi od 2.

Zbiór stanów oznaczany jest przez $\mathcal{Q}$. W badaniach skupiam się na dwóch podstawowych zbiorach stanów: binarnych $\mathcal{Q}_B = \{0,1\}$ oraz liczb rzeczywistych z zakresu od 0 do 1 $\mathcal{Q}_{\mathbb{R}} = [0,1]$. Dla ustalonego zbioru stanów definiuje się przestrzeń konfiguracji $\mathcal{X}$ na kracie $\mathcal{C}$ jako zbiór wszystkich przekształceń z $\mathcal{C}$ w $\mathcal{Q}$. Dla konfiguracji $\mathbf{x}\in\mathcal{X}$ przez x_i rozumie się stan i-tej komórki (w przypadku dwuwymiarowym odpowiednio $x_{i,j}$). Kluczowym parametrem w moich badaniach jest gęstość konfiguracji $\rho(\mathbf{x})$ będąca średnią wszystkich stanów komórek.

Ponieważ w badaniach istotne są jedynie binarne konfiguracje początkowe, to opisuję sposób redukcji zbioru takich konfiguracji do „istotnie różnych", czyli takich, które nie są swoimi przesunięciami. W literaturze nie wspomina się często tego faktu, ma to jednak duży wpływ przy obliczeniach przedstawionych w dalszych rozdziałach.

Moje rozważania skupiają się na sąsiedztwie o promieniu $r=1$, czyli takim, gdzie komórka ma jedynie wgląd w stany najbliższych sąsiadów. W przypadku dwuwymiarowych CAs oznacza to sąsiedztwo *von Neumanna*. Zgodnie z zasadą działania CAs, komórki aktualizowane są w każdym dyskretnym kroku czasowym $t\in\{1,2,\ldots\}$. Zmiana stanu następuje synchronicznie: każda komórka używa w tym celu tej samej reguły lokalnej $\mathbb{f}$ działającej na sąsiedztwie tej komórki. Jako wynik otrzymujemy regułę globalną $\mathbb{F}$ dla całej konfiguracji jednocześnie. Regułę lokalną $\mathbb{f}$ można przedstawić w postaci tabelarycznej LUT (ang. *LookUp Table*), której współczynniki l_i określają daną funkcję przejścia dla określonego sąsiedztwa. Taka postać ułatwia obliczenia oraz implementacje algorytmów.

W kolejnej części rozdziału opisuję tak zwane Elementarne CAs (ECAs, ang. *Elementary CAs*). Są to jednowymiarowe, binarne CAs o promieniu jeden - najszerzej rozpowszechnione CAs w literaturze i w zastosowaniach.

Na zakończenie rozdziału drugiego wprowadzam definicję ciągłych CAs (CCAs, ang. *Continuous CAs*) i przytaczam znane reguły lokalne $\mathbb{f}_d$, będące średnią wartością stanu komórki i jej sąsiadów. Przedstawiam również sposób wizualizacji (dynamiki) takich automatów.

Rozdział 3 - ang. *Affine Continuous Cellular Automata*

Rozdział ten skupia się na afinicznych CCAs, (ACCAs, ang. *Affine Continuous CAs*) biorących główny udział w badaniach i będących uogólnieniem ECAs. Na początek, fakt mówiący, że gdy funkcja jest afiniczna w jakiejś zmiennej, to musi być również w niej monotoniczna. Ten oczywisty fakt jest kluczowy, gdyż gwarantuje że rozpatrywany ACCA nie wyjdzie poza określony na początku zbiór stanów.

W pierwszej części tego rozdziału przedstawiam definicję jednowymiarowych ACCAs, zadając regułę lokalną $\mathbb{f}$ poprzez współczynniki l_i (dane w tabeli LUT):

$$\begin{aligned}\mathbb{f}(x,y,z) =& l_0(1-x)(1-y)(1-z) + l_1(1-x)(1-y)z\\ &+ l_2(1-x)y(1-z) + l_3(1-x)yz + l_4x(1-y)(1-z)\\ &+ l_5x(1-y)z + l_6xy(1-z) + l_7xyz\,.\end{aligned}$$

Następnie wprowadzam definicje pewnych podzbiorów ACCAs. Pierwszym z nich są tzw. zewnętrznie-totalistyczne CAs (ang. *Outer Totalistic CAs*), dla których wartość reguły lokalnej zależy jedynie od stanu danej komórki i sumy stanów jej sąsiadów. Badania dla tego typu reguł przedstawione są w Rozdziale 5.

Dalej podaję definicje automatów zachowujących gęstość. Jest to rodzina CCAs, które dla każdej konfiguracji $\mathbf{x} \in [0,1]^\star$ spełniają warunek

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbb{F}(\mathbf{x})) \ .$$

W przypadku jednowymiarowych ACCAs tabelę LUT dla takich reguł można zredukować do trzech parametrów.

$$(l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7) = (0, a, c, 1-b, 1-a-c, 1-c, b+c, 1) \ , \tag{1}$$

gdzie $a, b, c \in [0,1]$ oraz $a, b \leq 1 - c$. Taka redukcja pozwala na dokładniejsze badania, jak i na wizualną reprezentację rozmieszczenia poszczególnych reguł. Rozdział 6 skupia się na badaniach tego typu reguł.

W drugiej części tego rozdziału, rozszerzam definicje na dwuwymiarowe ACCAs. Zaczynam od definicji reguły lokalnej $\mathbb{f}$ dla dwóch wymiarów

$$\begin{aligned}
\mathbb{f}\left(y \begin{smallmatrix} x \\ z \\ v \end{smallmatrix} u\right) =& l_0(1-x)(1-y)(1-z)(1-u)(1-v) \\
&+ l_1(1-x)(1-y)(1-z)(1-u)v \\
&+ l_2(1-x)(1-y)(1-z)u(1-v) \\
&\vdots \\
&+ l_{30}xyzu(1-v) \\
&+ l_{31}xyzuv \ .
\end{aligned}$$

Następnie wyróżniam niektóre rodzaje dwuwymiarowych ACCAs. W szczególności, przedstawiam dwuwymiarowe ACCAs zachowujące gęstość i przeprowadzam analizę zbioru wszystkich takich reguł (które potrzebują już ośmiu niezależnych parametrów do opisu). Wskazuję również symetrie w tym zbiorze, pozwalające utożsamiać niektóre reguły ze sobą. Dodatkowo, wprowadzam definicję ACCAs zachowujących gęstość, których reguła lokalna nie zależy od y i v:

$$\mathbb{f}\left(y \begin{smallmatrix} x \\ z \\ v \end{smallmatrix} u\right) = (1-b-d)x + dz + bu \ ,$$

gdzie $b, d \in [0,1]$ oraz $b + d \leq 1$.

W dalszej części tego rozdziału definiuję reguły symetryczne ze względu na obrót o 90 stopni, czyli takie, których reguła lokalna spełnia:

$$\mathbb{f}\left(y \begin{smallmatrix} x \\ z \\ v \end{smallmatrix} u\right) = \mathbb{f}\left(v \begin{smallmatrix} y \\ z \\ u \end{smallmatrix} x\right) \ ,$$

oraz przedstawiam warunki na LUT dla takich reguł.

Szczegółowe badania dla tego typu reguł przedstawiam w Rozdziale 8.

Rozdział 4 - ang. *The Density Classification Problem*

W rozdziale tym przytaczam i wyjaśniam definicje związane z problemem klasyfikacji gęstości początkowej. Najpierw przypominam klasyczną definicję DCP, która mówi, że reguła globalna CCA $\mathbb{F}$ rozwiązuje klasyczny DCP dla danej wartości progowej $\rho_0 \in (0,1)$, jeżeli dla każdej konfiguracji początkowej $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^\star$ spełnione są warunki:

$$\begin{aligned}
\rho(\boldsymbol{x}) < \rho_0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \mathbb{F}^t(\boldsymbol{x}) = (0,0,\ldots,0) \ , \\
\rho(\boldsymbol{x}) > \rho_0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \mathbb{F}^t(\boldsymbol{x}) = (1,1,\ldots,1) \ .
\end{aligned}$$

Wyjaśniam również, że dla ACCAs nie istnieje reguła, która rozwiązuje DCP dla konfiguracji początkowych o dowolnej długości.

Eksperymenty oraz wyniki dla tego problemu przedstawiam w Rozdziale 7 dla jedno oraz w Rozdziale 9 dla dwuwymiarowych ACCAs.

W drugiej części, przytaczam definicję *rozluźnionego* (ang. *relaxed*) DCP dla ACCAs. Mówi ona, że reguła globalna CCA $\mathbb{F}$ rozwiązuje rozluźniony DCP dla danej wartości progowej $\rho_0 \in (0,1)$, jeżeli dla każdej konfiguracji początkowej $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^\star$ spełnione są warunki:

$$(\exists T)\left(\forall \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{\mathcal{C}}\right)(\forall t \geq T)\left(\begin{cases} \rho(\boldsymbol{x}) < \rho_0 \Rightarrow \mathbb{F}^t(\boldsymbol{x}) \in [0,\rho_0)^{\mathcal{C}} \\ \rho(\boldsymbol{x}) > \rho_0 \Rightarrow \mathbb{F}^t(\boldsymbol{x}) \in (\rho_0,1]^{\mathcal{C}} \end{cases}\right) \ .$$

Eksperymenty oraz wyniki dla tego problemu przedstawiam w Rozdziale 6, dla jedno, oraz w Rozdziale 8 dla dwuwymiarowych ACCAs.

Rozdział 5 - ang. *Dynamics of One-Dimensional Outer-Totalistic ACCAs*

Wyniki tego rozdziału zostały opublikowane w [5]. Dotyczą one kompleksowej analizy jednowymiarowych, zewnętrznie totalistycznych ACCAs, które są legalne (ang. *legal*), czyli takich których współczynnik LUT l_0 wynosi 0. Każda taka reguła lokalna jest zadana przez trzy parametry wzorem:

$$\mathbb{f}(x, y, z) = (d - c - b)(x + z)y + b(x + z) + cy \ , \tag{2}$$

gdzie $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$, $0 \leq c \leq 1$ i $c \leq 2d \leq c + 1$. Dzięki temu zbiór wszystkich takich reguł daje się łatwo sparametryzować punktami równoległościanu i przedstawiać graficznie. Przeprowadzone eksperymenty pozwoliły przebadać każdą z takich reguł i ujawniły występowanie różnego rodzaju „wrażliwości" na zmiany warunków początkowych:

- wrażliwość na zmianę parametrów: niewielka zmiana wartości parametrów b, c, d potrafi znacząco zmienić własności reguły,
- wrażliwość na zmiany konfiguracji początkowej: zmiana nawet jednej wartości w konfiguracji początkowej potrafi mieć wielki wpływ na dynamikę,
- wrażliwość na zmianę długości kraty: zmiana długości kraty nawet o jedną komórkę potrafi mieć znaczący wpływ na dynamikę.

Po przeprowadzeniu eksperymentów, wyniki zostały sklasyfikowane w grupy o podobnych zachowaniach. Kolejne podrozdziały skupiają się na poszczególnych grupach wskazując ich rozmieszczenie we wspomnianym równoległościanie oraz popierając słuszność obliczeń analitycznymi dowodami.

Rozdział 6 - ang. *Solving the Relaxed One-Dimensional DCP*

Wyniki tego rozdziału zostały opublikowane w [1, 2]. Pokazane są tutaj symulacje, poparte analitycznymi dowodami, dla jednowymiarowych ACCAs rozwiązujących rozluźniony DCP. Reguły lokalne tych ACCAs mają następującą postać ogólną:

$$\mathbb{f}(x, y, z) = (a + b + c - 1)(x - z)y + (1 - a - c)x + cy + az \ , \tag{3}$$

gdzie $a, b, c \in [0, 1]$ oraz $a, b \leq 1 - c$. Użycie trzech parametrów umożliwia wizualizacje rozmieszczenia wszystkich takich reguł w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej. W pierwszej części rozdziału przedstawiam szczegółowy opis dynamiki każdej takiej reguły. Kolejna natomiast skupia się na eksperymentach polegających na znalezieniu najlepszej reguły rozwiązującej problem, potrzebującej najmniejszą liczbę iteracji dla danych konfiguracji i wartości progowej $\rho_0 \in (0, 1)$. Na początku skupiam się na wartości $\rho_0 = 0.5$ i konfiguracjach o długości 25 komórek, biorąc również pod uwagę część konfiguracji o długości 149 komórek. W dalszej części eksperymentów poszukuję reguły z minimalną liczbą potrzebnych iteracji konfiguracji aby poprawnie sklasyfikować rozluźniony DCP, biorąc pod uwagę wartości progowe $\rho_0 \in (0, 1)$ z krokiem równym 0.001 i konfiguracjach o długości 23 komórek.

Rozdział 7 - ang. *Solving the Fixed-Length One-Dimensional DCP*

Wyniki tego rozdziału zostały opublikowane w [3]. W rozdziale tym skupiam się na jednowymiarowych ACCAs potrafiących rozwiązać klasyczny DCP dla konfiguracji o ustalonej długości. LUT reguły lokalnej takich ACCAs musi spełnić głównie następujące kryteria

$$\begin{cases} l_0 = 0 \\ l_1 = a \\ l_2 = c \\ l_3 = 1 - b \\ l_4 = 1 - \eta - a - c \\ l_5 = 1 + \gamma - c \\ l_6 = \epsilon - \gamma + b + c \\ l_7 = 1 \end{cases} \text{, gdzie } \begin{cases} a, b, c \in [0, 1] \\ \gamma \leq c \leq 1 + \gamma \\ -\eta \leq a + c \leq 1 - \eta \\ \gamma - \epsilon \leq b + c \leq 1 + \gamma - \epsilon \end{cases}$$

Zbiór takich reguł również może zostać przedstawiony w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej, co pozwala na wizualne przedstawienie poszczególnych reguł. Pokazane są wystarczające „warunki stopu" dla symulacji, tzn. warunki, których wystąpienie pozwala zakończyć daną symulacje, gdyż wiemy już jaki będzie jej wynik. Jest to kluczowy czynnik pozwalający na sprawniejsze przeprowadzenie symulacji komputerowych. Część związana z symulacjami skupia się na konfiguracjach o długości 23 komórek. Dodatkowo, przedstawione jest sześć przypadków unikalnych parametrów η, ϵ, γ, zawierających reguły ACCAs rozwiązujące klasyczny DCP dla omawianej konfiguracji.

Rozdział 8 - ang. *Solving the Relaxed Two-Dimensional DCP*

W rozdziale tym przedstawiam wyniki poszukiwania reguł rozwiązujących rozluźniony DCP dla dwuwymiarowych ACCAs. Wyniki te zostały opublikowane w [4]. Przedstawiam tutaj eksperymenty oraz rezultaty dla konfiguracji 5×5 oraz podzbioru konfiguracji 23×23. Pod uwagę biorę jedynie konfiguracje, których gęstość początkowa jest najbliższa 0.5. Poszukuję reguł, które potrafią rozwiązać zadany problem szybciej niż reguła $\mathbb{f}_d$. Dodatkowo badam reguły przedstawione w Rozdziale 3 - symetryczne ze względu na obrót o 90 stopni, oraz niezależne od y oraz v.

Rozdział 9 - ang. *Solving the Fixed-Length Two-Dimensional DCP*

Rozdział ten przedstawia badania nad poszukiwaniem dwuwymiarowych ACCAs potrafiących rozwiązać klasyczny DCP. Reguły te wyszukiwane są przez algorytm ewolucyjny. Na wstępie przedstawiam historie i podstawy algorytmów ewolucyjnych, z naciskiem na różnicowy algorytm ewolucyjny, który tutaj wykorzystuję. W kolejnych częściach skupiam się na wyszukiwaniu reguł rozwiązujących DCP dla konfiguracji o wymiarach (3×3), (5×3), (5×5). Wskazuję napotykane problemy jak i usprawnienia, które wykorzystuję przy eksperymentach. Rozdział ten jako jedyny nie został opublikowany, a jedynie w części przedstawiony na konferencji.

Rozdział 10 - ang. *Conclusion*

Rozdział ten jest podsumowaniem pracy jak i dyskusją kierunków przyszłych badań.

Bibliografia

[1] B. Wolnik, M. Dembowski, W. Bołt, J. M. Baetens i B. De Baets. „The Density Classification Problem in the Context of Continuous Cellular Automata". W: *Cellular Automata: 12th International Conference on Cellular Automata for Research and Industry, ACRI 2016, Fez, Morocco, September 5-8, 2016. Proceedings*. Red. S. El Yacoubi, J. Wąs i S. Bandini. Cham: Springer International Publishing, 2016, s. 79–87. ISBN: 978-3-319-44365-2. DOI: 10.1007/978-3-319-44365-2_8.

[2] B. Wolnik, M. Dembowski, W. Bołt, J. M. Baetens i B. De Baets. „Density-conserving affine continuous cellular automata solving the relaxed density classification problem". W: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 50.34 (lip. 2017), s. 345103. DOI: 10.1088/1751-8121/aa7d86.

[3] M. Dembowski, B. Wolnik, W. T. Bolt, J. Baetens i B. De Baets. „Affine continuous cellular automata solving the fixed-length density classification problem". W: *Natural Computing* 17.3 (2018), 467–477. ISSN: 1567-7818. DOI: 10.1007/s11047-017-9631-4.

[4] M. Dembowski, B. Wolnik, W. T. Bolt, J. Baetens i B. De Baets. „Two-dimensional affine continuous cellular automata solving the relaxed density classification problem". W: *Journal of Cellular Automata* 14.3-4 (2019), s. 191–212. ISSN: 1557-5969.

[5] B. Wolnik, M. Dembowski, A. Augustynowicz i B. De Baets. „A complete description of the dynamics of legal outer-totalistic affine continuous cellular automata". W: *Nonlinear Dynamics* 110.1 (2022), s. 589–610. DOI: 10.1007/s11071-022-07642-w.