

Warszawa, 31 marca 2026 r.

Prof. Janusz Szczepański
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Warszawa

Recenzja Rozprawy Doktorskiej

Autor rozprawy: mgr Serhii Denysov

Tytuł rozprawy:

Algorithmic information complex based on variational inequalities for optimization problems in networks

Promotor: prof. dr hab. Janusz Kacprzyk

Promotor pomocniczy: prof. dr hab. Artur Zaporozhets

Rozprawa została wykonana na zamówienie Rady Naukowej Instytutu Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk.

Informacje o doktorancie i jego dorobku

Mgr Serhii Denysov jest absolwentem Wydziału Cybernetyki Uniwersytetu im. Tarasa Szewczenki w Kijowie, gdzie uzyskał stopień magistra matematyki stosowanej. Następnie ukończył również studia magisterskie w zakresie Data Science w Harbour Space Institute of Technology (Barcelona, Hiszpania).

Doktorant posiada bardzo bogate doświadczenie akademickie. Od roku 2004 pracował jako adiunkt (assistant professor) na Wydziale Cybernetyki Uniwersytetu im. Tarasa Szewczenki w Kijowie. W ramach swojej działalności dydaktycznej prowadził zajęcia obejmujące szeroki zakres zagadnień z matematyki stosowanej i informatyki, w szczególności z metod numerycznych, algorytmów obliczeniowych, programowania obiektowego, podstaw uczenia maszynowego oraz obliczeń rozproszonych.

W ostatnich latach prowadzi także zajęcia jako visiting lecturer w Harbour Space Institute of Technology oraz w Bangkoku.

Na uwagę zasługuje również znaczące doświadczenie przemysłowe doktoranta. Pracował on jako programista oraz architekt systemów informatycznych w różnych projektach związanych z analizą danych i systemami wysokiej wydajności. Aktualnie pracuje jako senior algorithms developer w firmie Drawer.AI.

Dorobek naukowy doktoranta obejmuje kilka publikacji dotyczących algorytmów dla nierówności wariacyjnych. Prace te zostały opublikowane m.in. w czasopiśmie *Cybernetics and Systems Analysis* (Springer) oraz w materiałach konferencyjnych poświęconych modelowaniu matematycznemu i optymalizacji.

Tematyka publikacji obejmuje w szczególności:

- a) analizę zbieżności metod ekstragradientowych dla nierówności wariacyjnych,
- b) konstrukcję adaptacyjnych metod iteracyjnych,
- c) zastosowanie dywergencji Bregmana w algorytmach optymalizacyjnych,
- d) zastosowania algorytmów dla nierówności wariacyjnych w modelach ekonomii sieciowej.

Dorobek naukowy doktoranta należy uznać za spójny tematycznie i bezpośrednio związany z problematyką rozprawy doktorskiej.

Charakterystyka tematyki rozprawy

Rozprawa doktorska mgr Serhii Denysova dotyczy konstrukcji oraz analizy algorytmów przeznaczonych do rozwiązywania nierówności wariacyjnych oraz ich zastosowań w problemach optymalizacji i równowagi w strukturach sieciowych.

Nierówności wariacyjne stanowią jeden z podstawowych formalizmów matematycznych wykorzystywanych do modelowania szerokiej klasy problemów występujących w ekonomii, badaniach operacyjnych, teorii gier, analizie sieci transportowych oraz w wielu innych dziedzinach matematyki stosowanej.

Z matematycznego punktu widzenia problem nierówności wariacyjnej polega na znalezieniu punktu (wektora) $x \in C$ takiego, że

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \text{ dla każdego } y \in C,$$

gdzie C jest zbiorem wypukłym w odpowiedniej przestrzeni liniowej, a F jest operatorem odwzorowującym przestrzeń w siebie. W wielu zastosowaniach operator F reprezentuje gradient funkcji celu lub funkcję opisującą zachowanie systemu w stanie równowagi.

Z tego względu konstrukcja efektywnych algorytmów dla nierówności wariacyjnych jest istotnym zagadnieniem zarówno z punktu widzenia teorii matematycznej, jak i zastosowań praktycznych.

Struktura Rozprawy

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów.

Rozdział pierwszy zawiera przegląd literatury dotyczącej modeli opartych na nierównościach wariacyjnych oraz algorytmów przeznaczonych do ich rozwiązywania. Autor omawia m.in. modele ekonomii sieciowej, modele równowagi transportowej oraz problemy optymalizacji sieci dostaw.

Rozdział drugi zawiera konstrukcję adaptacyjnego wariantu metody ekstragradientowej. Autor proponuje adaptacyjną regułę wyboru kroku pozwalającą uniknąć konieczności znajomości stałej

Lipschitza operatora. Dowody zbieżności wykorzystują własności operatorów monotonicznych oraz konstrukcję odpowiednich nierówności typu Fejéra.

W rozdziale trzecim Autor analizuje metody projekcyjne wykorzystujące dywergencję Bregmana. Dywergencja ta ma postać

$$D\varphi(x,y)=\varphi(x)-\varphi(y)-\langle \nabla\varphi(y),x-y \rangle.$$

Podejście to pozwala uogólnić klasyczne metody projekcyjne oraz dostosować geometrię algorytmu do struktury problemu.

Czwarty rozdział zawiera rozszerzenie analizowanych metod na przestrzenie Banacha. Jest to interesujące rozszerzenie wyników znanych dla przestrzeni Hilberta.

Ostatni **piąty rozdział** opisuje środowisko programistyczne umożliwiające analizę zachowania algorytmów oraz ich zastosowanie do problemów sieciowych.

Najważniejsze osiągnięcia rozprawy

Do najważniejszych osiągnięć pracy zaliczam:

1. konstrukcję adaptacyjnych metod ekstragradientowych dla nierówności wariacyjnych
2. zastosowanie dywergencji Bregmana w metodach projekcyjnych
3. rozszerzenie metod iteracyjnych na przestrzenie Banacha
4. implementację środowiska eksperymentalnego umożliwiającego analizę algorytmów.

Szczegółowa ocena wyników przedstawionych w rozdziałach 2-4 rozprawy

W niniejszej części recenzji chciałbym bardziej szczegółowo odnieść się do wyników przedstawionych w rozdziałach 2, 3 oraz 4 Rozprawy. Rozdziały te stanowią zasadniczą część merytoryczną pracy i zawierają główne rezultaty naukowe Autora.

Rozdział 2: Adaptacyjne metody extragradientowej

Jednym z głównych rezultatów rozprawy jest analiza adaptacyjnego wariantu metody ekstragradientowej. Rozdział 2 należy uznać za jeden z najważniejszych fragmentów rozprawy od strony teoretycznej. Autor analizuje w nim klasę problemów bardziej ogólną niż standardowa nierówność wariacyjna.

Rozważany problem polega na znalezieniu punktu

$$x \in VI(A,C) \cap F(S)$$

$$\text{gdzie } VI(A,C) = \{ x \in C : \langle A(x), y - x \rangle \geq 0 \text{ dla każdego } y \in C \}$$

$$\text{oznacza zbiór rozwiązań nierówności wariacyjnej, natomiast } F(S) = \{ x \in C : Sx = x \}$$

oznacza zbiór punktów stałych operatora S . Innymi słowy, poszukiwany punkt musi jednocześnie spełniać warunek nierówności wariacyjnej oraz być punktem stałym dodatkowego operatora. Autor

proponuje algorytm będący połączeniem metody ekstragradientowej z iteracją typu Krasnosielskiego-Manna.

Klasyczna metoda ekstragradientowa ma postać

$$y_k = P_C (x_k - \lambda A(x_k))$$

$$x_{k+1} = P_C (x_k - \lambda A(y_k))$$

gdzie P_C oznacza projekcję na zbiór wypukły C .

Istotną cechą zaproponowanego przez autora algorytmu jest zastosowanie adaptacyjnej regulacji kroku λ_k . W klasycznych metodach parametr λ musi spełniać warunek

$$0 < \lambda < 1 / L$$

gdzie L oznacza stałą Lipschitza operatora A . W praktyce parametr L często nie jest znany, dlatego zaproponowana w rozprawie reguła adaptacyjna stanowi ważne ulepszenie algorytmu.

Autor pokazuje również, że generowany przez algorytm ciąg iteracji spełnia nierówność typu Fejéra

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - \alpha_k \|x_k - y_k\|^2$$

gdzie x^* oznacza dowolny punkt rozwiązujący rozważany problem, zwykle należący do zbioru rozwiązań X^* albo S . Stąd wynika zbieżność ciągu iteracyjnego do rozwiązania problemu. Przedstawiona analiza jest ciekawa matematycznie i opiera się na standardowych narzędziach teorii operatorów monotonicznych.

Rozdział 3: Algorytmy wykorzystujące dywergencję Bregmana

Rozdział 3 poświęcony jest metodom wykorzystującym dywergencję Bregmana do rozwiązywania nierówności wariacyjnych. Dywergencja Bregmana definiowana jest jako

$$D\varphi(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y) - \langle \nabla \varphi(y), x - y \rangle$$

gdzie φ jest funkcją ściśle wypukłą.

W tej geometrii klasyczna projekcja euklidesowa zostaje zastąpiona projekcją Bregmanowską

$$P_C^\varphi(x) = \operatorname{argmin}_{y \in C} D_\varphi(y, x).$$

Zastosowanie dywergencji Bregmana pozwala dostosować geometrię algorytmu do struktury rozwiązywanego problemu. Autor pokazuje, że w wielu ważnych przypadkach, na przykład dla sympleksu

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

naturalną dywergencją jest dywergencja Kullbacka–Leiblera

$$D_{KL}(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \log \left(\frac{x_i}{y_i} \right)$$

W takim przypadku projekcja Bregmanowska ma postać analityczną, co znacząco upraszcza implementację algorytmu.

Autor proponuje dwa algorytmy:

1. bregmanowską wersję metody ekstragradientowej
2. metodę typu extrapolation-from-the-past

W obu przypadkach regulacja kroku nie wymaga dodatkowych wywołań operatora.

Rozdział ten jest dobrze powiązany z literaturą dotyczącą metod mirror descent oraz mirror-prox Nemirovskiego.

Rozdział 4: Metody w przestrzeniach Banacha

Rozdział 4 zawiera rozszerzenie analizowanych metod na przestrzenie Banacha. Przejście od przestrzeni Hilberta do przestrzeni Banacha nie jest jedynie formalnym uogólnieniem, ponieważ w przestrzeniach Banacha nie można korzystać z wielu własności geometrycznych charakterystycznych dla przestrzeni Hilberta.

Autor wykorzystuje odpowiednie pojęcia geometryczne, w szczególności pojęcie **jednostajnej wypukłości przestrzeni** (wprowadzone przez Jamesa A. Clarksona w 1936). Przestrzeń Banacha X jest jednostajnie wypukła, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że z warunków $\|x\| = \|y\| = 1$ oraz $\|x - y\| \geq \varepsilon$ wynika $\|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta$. W dalszej części pracy Autor analizuje metodę typu extrapolation-from-the-past w takiej przestrzeni.

Schemat iteracyjny można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} y_k &= P_C (x_k - \lambda_k A(x_{k-1})) \\ x_{k+1} &= P_C (x_k - \lambda_k A(y_k)). \end{aligned}$$

Autor pokazuje, że przy odpowiednich założeniach dotyczących geometrii przestrzeni oraz własności operatora A można uzyskać zbieżność iteracji do rozwiązania problemu.

Rozszerzenie metod z przestrzeni Hilberta do przestrzeni Banacha wymaga zastosowania bardziej subtelnych narzędzi analizy funkcjonalnej i stanowi najtrudniejszy matematycznie fragment rozprawy.

Oryginalność wyników na tle literatury

Badania nad algorytmami dla nierówności wariacyjnych mają długą historię. Jednym z najważniejszych algorytmów w tej dziedzinie jest metoda ekstragradientowa zaproponowana przez

Korpelewicza w 1976 roku. Metoda ta polega na wykonywaniu dwóch kolejnych projekcji na zbiór dopuszczalny:

$$y_k = P_C(x_k - \lambda F(x_k))$$

$$x_{k+1} = P_C(x_k - \lambda F(y_k)).$$

W kolejnych latach zaproponowano wiele modyfikacji tej metody, m.in. przez Antipina, Nemirovskiego, Tsenga oraz Solodova. Szczególnie istotne znaczenie miały prace Nemirovskiego dotyczące algorytmu Mirror-Prox oraz prace Tsenga dotyczące metod forward-backward-forward.

Wyniki rozprawy wpisują się w ten nurt badań. Autor proponuje adaptacyjne modyfikacje metod ekstragradientowych oraz metod typu extrapolation-from-the-past.

Na szczególne podkreślenie zasługują:

- a) konstrukcja adaptacyjnych reguł wyboru kroku,
- b) wykorzystanie dywergencji Bregmana w schematach projekcyjnych,
- c) rozszerzenie metod iteracyjnych na przestrzenie Banacha.

Znaczenie wyników dla zastosowań

Warto podkreślić, że nierówności wariacyjne stanowią obecnie ważne narzędzie modelowania w wielu obszarach zastosowań. Przykładowo są one wykorzystywane w modelach równowagi transportowej, modelach ekonomii sieciowej, a także w analizie niektórych problemów uczenia maszynowego. Z tego względu rozwój efektywnych algorytmów dla nierówności wariacyjnych ma istotne znaczenie dla wielu dziedzin nauki i techniki.

Uwagi krytyczne

Można sformułować kilka uwag o charakterze dyskusyjnym.

- Po pierwsze, w części teoretycznej można byłoby szerzej odnieść się do metod mirror-prox oraz innych algorytmów stosowanych w problemach siodłowych.
- Po drugie, w kilku miejscach dowody twierdzeń przedstawione są w formie skrótowej.
- Po trzecie, interesującym rozszerzeniem pracy byłaby analiza szybkości zbieżności proponowanych algorytmów.

Uwagi te nie wpływają jednak na ogólną bardzo pozytywną ocenę pracy.

Podsumowanie

Rozprawa doktorska mgr Serhii Denysova dotyczy aktualnej i ważnej problematyki konstrukcji algorytmów dla nierówności wariacyjnych. Autor zaproponował adaptacyjne schematy iteracyjne oraz przeprowadził analizę ich zbieżności. Praca stanowi wartościowy wkład w rozwój metod iteracyjnych dla nierówności wariacyjnych.

Rozprawa doktorska mgr Serhii Denysova, mimo iż wykorzystuje zaawansowane narzędzia matematyczne, w sposób jednoznaczny mieści się w dyscyplinie naukowej Informatyka techniczna i telekomunikacja. Wynika to z kilku zasadniczych przesłanek o charakterze merytorycznym.

Przedmiotem rozprawy jest konstrukcja oraz analiza algorytmów iteracyjnych, które stanowią podstawowy obszar badań informatyki teoretycznej i technicznej. Zaproponowane metody ekstragradientowe, metody typu extrapolation-from-the-past oraz algorytmy wykorzystujące dywergencję Bregmana są bezpośrednio związane z projektowaniem efektywnych procedur obliczeniowych.

Opracowane w rozprawie metody są ukierunkowane na rozwiązywanie problemów optymalizacyjnych w strukturach sieciowych, takich jak modele równowagi transportowej, modele przepływów w sieciach oraz algorytmy typu PageRank. Problemy te należą do klasycznych zagadnień informatyki technicznej, w szczególności do obszaru algorytmiki grafowej, analizy sieci oraz systemów rozproszonych.

Istotnym elementem rozprawy jest opracowanie środowiska programistycznego oraz implementacja zaproponowanych algorytmów, co wyraźnie wskazuje na inżynierski i obliczeniowy charakter pracy. Autor nie ogranicza się do analizy matematycznej, lecz bada również praktyczne aspekty działania algorytmów, takie jak ich efektywność obliczeniowa i zastosowanie w rzeczywistych problemach.

Zastosowanie dywergencji Bregmana oraz metod typu mirror-prox wpisuje się w współczesny nurt badań nad algorytmami pierwszego rzędu wykorzystywanymi w uczeniu maszynowym i analizie dużych zbiorów danych, które stanowią jeden z głównych obszarów informatyki technicznej.

Tematyka rozprawy obejmuje również zagadnienia związane z przetwarzaniem informacji w sieciach oraz modelowaniem procesów decyzyjnych w systemach złożonych, co stanowi naturalny obszar styku informatyki technicznej i telekomunikacji.

Podsumowując, mimo że rozprawa wykorzystuje aparat matematyczny charakterystyczny dla matematyki stosowanej, jej głównym przedmiotem są algorytmy, ich własności obliczeniowe oraz zastosowania w systemach informatycznych i sieciowych. Z tego względu rozprawa w pełni mieści się w dyscyplinie **Informatyka techniczna i telekomunikacja**.

Wniosek końcowy

Stwierdzam, że Rozprawa doktorska mgr Serhii Denysova spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim określone w obowiązujących przepisach prawa. **Wnoszę o dopuszczenie Rozprawy do publicznej obrony.**

